Lei 19,10

IX

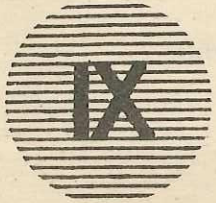
MINISTERUL

Fi

Manual pentr

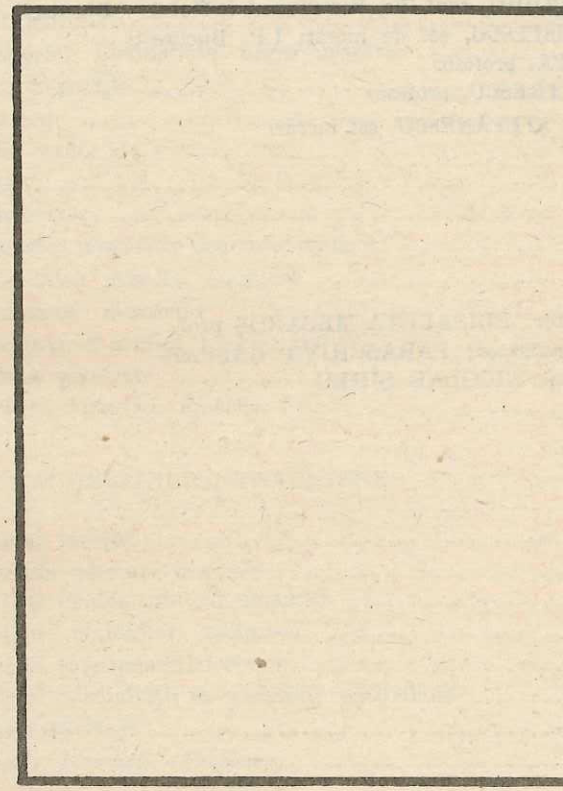
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎN

ANATOLIE HRISTEV VASILE FĂLIE



Fizică

Manual pentru clasa a IX-a



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat pe baza programei aprobate de M.E.Î. cu nr. 3448/28 IV 1979 și avizat de Comisia de fizică a M.E.Î.
Revizuit în 1981.

Cap. 1; 2; 3 (§ 1 — 5); 5 și 6 au fost elaborate de *A. Hristev*
Cap. 4; 8 și 9 au fost elaborate de *V. Fălie*
Cap. 3 (§ 6 — 8); 7 și 10 au fost elaborate de *D. Manda*

REFERENȚI:

C. VREJOIU, conf. dr. Facultatea de Fizică — București.
C. CRISTESCU, șef de lucrări I.P. București
I. POPA, profesor
A. PETRESCU, profesor
PAUL ȘTEFĂNESCU, șef lucrări

Redactor: ELISABETA MESAROȘ prof.
Tehnoredactor: PARASCHIVA GAȘPAR
Coperta: NICOLAE SÎRBU

CUPRINS

CAP. 1. MIȘCAREA ȘI REPAUSUL

1.1. Sistem de referință
1.2. Punct material
1.3. Traiectorie. Coordonate. Legea mișcării
1.4. Vector de poziție
1.5. Deplasare
1.6. Mărimi vectoriale
1.7. Viteza
1.8. Accelerația
1.9. Clasificarea mișcărilor punctului material
1.10. Relativitatea mișcării mecanice
1.11. Compunerea mișcărilor
1.12. Reprezentarea grafică a legii mișcării
Probleme rezolvate
Întrebări. Exerciții. Probleme

CAP. 2. PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

2.1. Principiul inerției
2.2. Sisteme de referință inerțiale
2.3. Principiul fundamental al dinamicii
2.4. Principiul acțiunilor reciproce
2.5. Principiul suprapunerii forțelor
2.6. Principiul relativității în mecanica newtoniană
Probleme rezolvate
Întrebări. Exerciții. Probleme

CAP. 3. MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL SUB ACȚIUNEA UN TIPURI DE FORȚE

3.1. Mișcarea rectilinie uniformă
Probleme rezolvate
Întrebări. Exerciții. Probleme

3.2. Mişcarea rectilinie uniform variată 64
Probleme rezolvate 69
Întrebări. Exerciţii. Probleme 71
3.3. Mişcarea corpurilor sub acţiunea greutăţii 72
Probleme rezolvate 77
Întrebări. Exerciţii. Probleme 80
3.4. Forţele de frecare 83
Probleme rezolvate 92
Întrebări. Exerciţii. Probleme 94
3.5. Mişcarea circulară uniformă 96
Problemă rezolvată 105
Întrebări. Exerciţii. Probleme 106
3.6. Forţe elastice 108
Probleme rezolvate 111
Întrebări. Exerciţii. Probleme 112
3.7. Legea atracţiei universale a lui Newton. Cîmpul gravitaţional 113
3.8. Masa gravifică. Relaţia dintre masa gravifică şi masa inerţială. Sateliţii artificiali 119
Problemă rezolvată 122
Întrebări. Exerciţii. Probleme 122

CAP. 4. ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ŞI A SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE

4.1. Lucrul mecanic efectuat la mişcarea punctului material într-un cîmp de forţe 124
4.2. Energia cinetică. Teorema variaţiei energiei cinetice a punctului material 135
4.3. Energia potenţială a punctului material în cîmp conservativ de forţe. Energia mecanică a punctului material în cîmp conservativ de forţe 139
4.4. Conservarea energiei mecanice 144
4.5.* Sisteme de puncte materiale. Forţe interne şi forţe externe 145
Probleme rezolvate 147
Întrebări. Exerciţii. Probleme 148

CAP. 5. IMPULSUL MECANIC

5.1. Teorema impulsului pentru punctul material. Conservarea impulsului 153
5.2. Teorema impulsului şi legea conservării impulsului pentru un sistem de două particule 154
5.3.* Teorema impulsului şi legea conservării impulsului pentru un sistem oarecare de particule 155
5.4. Centrul de masă al unui sistem de două particule 156
5.5.* Centrul de masă al unui sistem oarecare de particule 157
5.6. Ciocniri 158
Probleme rezolvate 161
Întrebări. Exerciţii. Probleme 163

CAP. 6. MOMENTUL CINETIC

6.1. Momentul forţei. Momentul cinetic al punctului material. 165
6.2. Teorema momentului cinetic pentru punctul material. C momentului cinetic 166
6.3*. Teorema momentului cinetic total al unui sistem mecanic. rea momentului cinetic total 168
Întrebări. Exerciţii. Probleme 170

CAP. 7*. CINEMATICA ŞI DINAMICA RIGIDULUI

7.1. Noţiunea de rigid 172
7.2. Viteza şi acceleraţia unghiulară 173
7.3. Energia cinetică de rotaţie. Momentul de inerţie al unui ri 175
7.4. Legile cinematicii şi dinamicii solidului rigid 177
Probleme rezolvate 179
Întrebări. Exerciţii. Probleme 181

CAP. 8. ECHILIBRUL MECANIC AL CORPURILOR

8.1. Sistem de forţe concurente. Rezultanta. Mişcarea de tr 183
8.2. Compunerea forţelor paralele. Cuplul de forţe. Mişcarea de 184
8.3. Centrul de greutate 186
8.4. Echilibrul mecanic. Condiţii de echilibru 187
8.5. Echilibrul în cîmp gravitaţional. Echilibrul şi energia pot 188
Întrebări. Exerciţii. Probleme 189

CAP. 9. MECANICA FLUIDELOR

9.1. Starea fluidă 191
9.2. Noţiunea de presiune 192
9.3. Statica fluidelor: hidrostatica şi aerostatica 193
9.4. Dinamica fluidelor 195
Întrebări. Exerciţii. Probleme 197

CAP. 10. UNDE ELASTICE. NOŢIUNI DE ACUSTICĂ

10.1 Oscilatorul liniar armonic. Compunerea oscilaţiilor 199
10.2. Pendulul gravitaţional. Rezonanţa 201
10.3. Propagarea mişcării oscilatorii 202

10.4. Unde transversale, unde longitudinale. Viteza de propagare 274
10.5. Ecuaţia undei plane 282
10.6. Clasificarea undelor elastice după frecvenţă 285
10.7. Condiţii de audibilitate a oscilaţiilor elastice 285
10.8. Reflexia şi refracţia undelor 286
10.9. Difracţia 292
10.10. Interferenţa. Unde staţionare 293
10.11.* Coarde şi tuburi sonore 300
Întrebări. Exerciţii. Probleme 302
Probleme recapitulative 307

1

MIŞCAREA ŞI REPAUSUL

Fizica studiază diferite fenomene ale naturii: mecanice, ter optice, atomice etc. Cel mai simplu dintre ele este *mişcarea mec* în cadrul *mecanicii*.

Mecanica, numită *clasică newtoniană*, a fost elaborată ISAAC NEWTON (1643—1727) şi expusă în celebra sa cart *matematice ale filozofiei naturale*" (1687), unde sînt formulate sau *principii* ale mecanicii, precum şi legea atracţiei universa nale) (aplicată la mişcarea sistemului solar).

Mecanica se împarte de obicei în trei capitole: *cinematic* descrierea geometrică, spaţio-temporală, a mişcării (coordonate torie, viteză, acceleraţie); *dinamica* studiază şi cauzele mişcării (sul, lucrul mecanic, energia); *statica* studiază echilibrul corpur se mai împarte în: mecanica punctului material, mecanica sistem materiale, mecanica solidului rigid, mecanica fluidelor etc.

În capitolul 1 sînt expuse noţiuni de cinematică a punct

1.1. SISTEM DE REFERINŢĂ

Deplasările oamenilor, mişcările diferitelor piese ale ma deplasarea vehiculelor, curgerea apelor, curenţii de aer — iat *mişcări mecanice*.

Cînd vorbim de mişcarea mecanică a unui corp, înţeleg schimbarea poziţiei sale *faţă de alte corpuri*, de obicei faţă de Pă de diferite obiecte fixe pe Pămînt (case, borne kilometrice etc.)

Se numeşte *mişcare mecanică* a unui corp schimbarea poz de alte corpuri.

Repausul este un caz particular al mişcării: un corp este î poziţia sa faţă de alte corpuri nu se schimbă.

Pentru a studia mișcarea unui corp trebuie să alegem totdeauna un alt corp, numit *corp de referință* (de exemplu, Pămîntul), la care să raportăm în fiecare moment poziția corpului studiat. Desigur, orice corp de referință este la rîndul său în mișcare față de alte corpuri. Pentru a determina *poziția* corpului studiat la diferite *momente* sînt necesare o *riglă* și un *ceasornic*.

Corpul de referință, împreună cu rigla pentru determinarea poziției corpurilor studiate și cu ceasornicul pentru indicarea momentului, constituie un *sistem de referință*, numit pe scurt *referențial*.

1.2. PUNCT MATERIAL

În mișcarea mecanică a corpurilor nu sînt determinante unele proprietăți ale acestora, de exemplu, cele termice, cele optice, și de aceea le putem neglija. În multe probleme nu ne interesează nici deformarea corpurilor, de exemplu, la căderea și aruncarea obiectelor, de aceea în astfel de probleme o putem neglija, considerînd corpul *rigid*.

Mișcarea solidului rigid este totuși complicată, de aceea se studiază mai întîi mișcarea unui corp ale cărui dimensiuni și rotații proprii sînt neglijabile în problema dată. Acesta este *punctul material*, caracterizat numai prin *masa* sa (deci un corp cu dimensiuni neglijabile față de distanțele sale pînă la corpurile înconjurătoare).

Un același corp poate fi considerat punct material într-o problemă și într-o altă problemă, *nu*.

De exemplu, în mișcarea unui vapor pe ocean, dimensiunile sale nu sînt esențiale și pot fi neglijate (fig. 1.1), însă în cazul manevrării în rada unui port, ele nu pot fi neglijate. O piatră în mișcarea sa în atmosferă poate fi

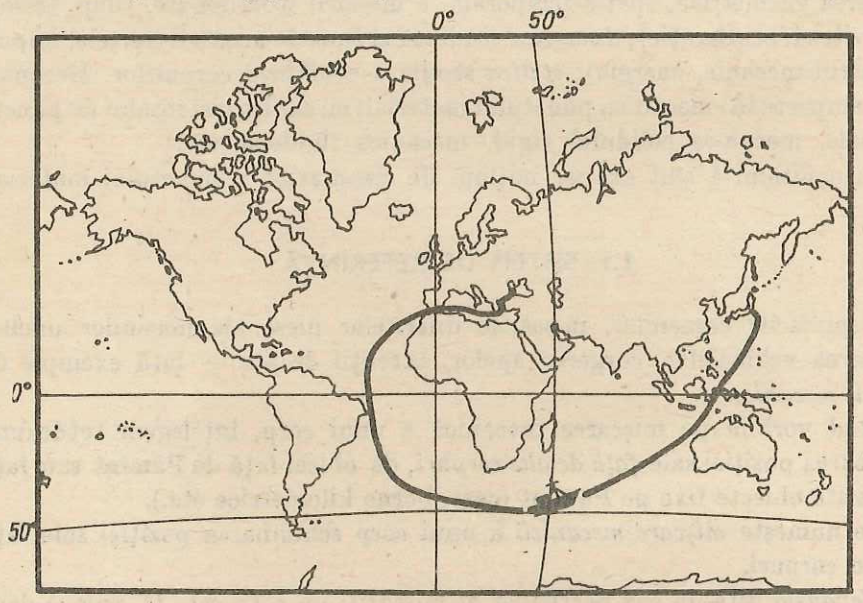


Fig. 1.1. Un vapor pe un ocean se poate aproxima printr-un punct a cărui poziție în fiecare moment este dată de coordonatele sale geografice: latitudinea și longitudinea.

aproximată de cele mai multe ori printr-un punct material, n
în cazul rostogolirii sale pe o suprafață.

Cînd toate punctele unui corp se mișcă *identic* (mișcă
atunci mișcarea unui singur punct oarecare al corpului
deplin mișcarea întregului corp, indiferent de dimensiunile a
aplica modelul punctului material.

Dacă nu interesează masa corpului (în cinematică), p
numește *mobil*.

1.3. TRAIECTORIE. COORDONATE. LEGEA M

Curba descrisă de un mobil în timpul mișcării sale se
(fig. 1.2). Traiectoria poate fi rectilinie sau curbilinie. Tra
poate fi situată: într-un plan — mișcare *plană* (de exemp
lară), sau în spațiu (de exemplu, mișcarea unui punct perife

Mișcarea rectilinie și mișcarea circulară sînt cele mai s
vente mișcări.

1.3.1. **Cazul mișcării rectilinii.** Pentru a determina p
fiecare moment, alegem pe dreapta mișcării un punct or
pozitiv (obținem astfel axa coordonatelor Ox). *Coordonata*
distanța de la originea O pînă la corp, prevăzută cu semn

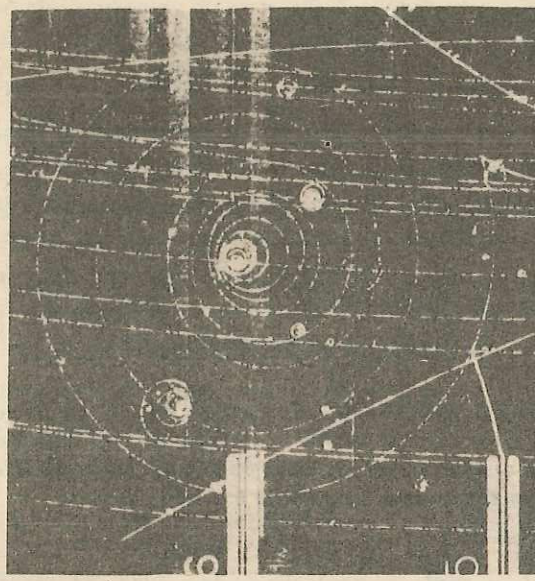


Fig. 1.2. Particulele atomice deplasîndu-se
camera cu ceață determină în drumul lor formar
unor picături fine de apă (vizibile la microsc
prin iluminare laterală).

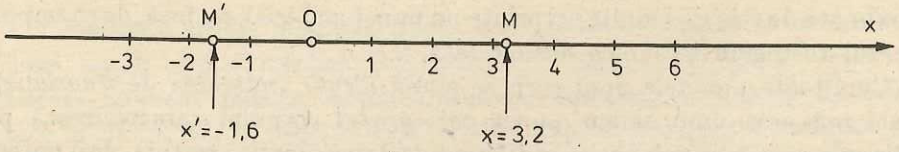


Fig. 1.3. Poziția mobilului pe traiectoria sa rectilinie este determinată de coordonata sa x. Coordonata este pozitivă dacă mobilul se află de partea pozitivă a axei (M) și este negativă, dacă mobilul este de partea cealaltă (M').

după cum corpul se află de partea pozitivă sau de cea negativă a axe (fig. 1.3).

Pentru a descrie mișcarea mobilului pe traiectoria sa rectilinie trebuie să cunoaștem poziția mobilului în fiecare moment pe această traiectorie, adică coordonata sa x în funcție de timpul t:

$$x = f(t).$$

Această expresie constituie *legea mișcării* (ecuația cinematică a mișcării).

1.3.2. **Cazul mișcării într-un plan.** Pentru a determina poziția corpului în fiecare moment, alegem *două axe* de coordonate Ox, Oy, perpendiculare între ele, situate în planul mișcării. Poziția M a corpului este dată de cele *două* coordonate: x (abscisa) și y (ordonata), care se obțin ducînd din M paralele la axele de coordonate (fig. 1.4). Pentru a descrie mișcarea corpului (în plan) trebuie să cunoaștem coordonatele sale (x, y) în funcție de timpul t, adică *două* funcții:

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t)$$

(ecuațiile cinematice ale mișcării). Fiecare ecuație descrie mișcarea proiecției mobilului pe axa respectivă sau mișcarea mobilului în direcția axei respective (de exemplu, spre Est sau spre Nord). Mișcarea plană a mobilului se descompune astfel în două mișcări rectilinii după cele două axe alese.

Se pot alege și alte sisteme de coordonate pentru a descrie poziția și mișcarea mobilului, de exemplu poziția unui vapor pe ocean este dată de coordonatele sale geografice: latitudinea și longitudinea (fig. 1.1).

1.3.3. **Cazul mișcării în spațiu.** Alegem un sistem de trei axe de coordonate Ox, Oy, Oz, perpendiculare între ele. Atunci poziția mobilului M este dată de *trei* coordonate: x (abscisa), y (ordonata) și z (cota), care se obțin ducînd din M paralele la axe, ca în figura 1.5. Mișcarea corpului în spațiu este descrisă de *trei* ecuații:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

(ecuațiile cinematice ale mișcării).

Ele descriu mișcarea corpului în spațiu după cele trei direcții.

Se pot alege și alte sisteme de coordonate pentru a determina poziția mobilului în spațiu.

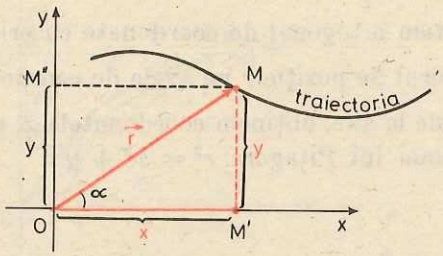


Fig. 1.4. Poziția unui mobil în plan este dată de cele două coordonate ale sale: abscisa $x = OM'$ și ordonata $y = M'M = OM''$. Abscisa x și ordonata y se obțin proiectînd pe axele de coordonate vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $(x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha)$. Proiecțiile se obțin ducînd din vîrful vectorului de poziție $\vec{r}$ paralele la axele de coordonate.

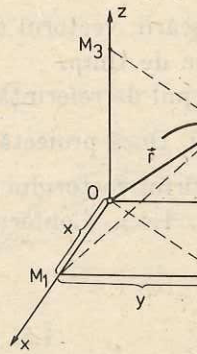


Fig. 1.5. Poziția m
dată de cele trei
abscisa $x = OM_1$, c
$= OM_2$ și cota $z =$
donatele x, y, z se
axele de coordonat
$\vec{r} =$

1.4. VECTOR DE POZIȚIE

Un alt mod de a preciza poziția unui mobil este urm
corpul de referință un punct-origine O și îl unim cu mobilu
segmentul de dreaptă orientat $\overrightarrow{OM}$ (fig. 1.4—1.5), numit
mobilului, $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

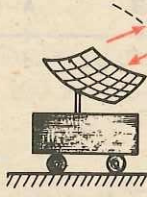
El este caracterizat prin:

1) *modul* (sau mărime) dat de lungimea $r = OM$ a
tat $\overrightarrow{OM}$;

2) *direcție*, dată de dreapta definită de punctele O,

3) *sens*, dat de succesiunea $O—M$, origine-mobil.

Cunoașterea vectorului de poziție (ca modul, direcție și sens) înseamnă cunoașterea poziției în spațiu a mobilului.



De exemplu, o instalație radar determină vectorul de poziție al unui obiect-țintă (avion) cu ajutorul unui impuls de unde electromagnetice (radio) dirijat în spațiu. Știind viteza de propagare a undelor ($c = 300\,000$ km/s) și măsurînd timpul de propagare dus-întors a semnalului, găsim distanța r pînă la obiect. Direcția este dată de orientarea antenei emițătoare (fig. 1.6).

Fig. 1.6. In
mină vectoru
tului re

În timpul mișcării, vectorul de poziție se schimbă ca modul și orientare, deci este o funcție de timp.

Legăm de corpul de referință un sistem ortogonal de coordonate cu originea în punctul O. Dacă proiectăm vectorul de poziție $\vec{r}$ pe axele de coordonate, ducînd din vîrful vectorului $\vec{r}$ paralele la axe, obținem coordonatele x, y ale mobilului (fig. 1.4). Conform teoremei lui Pitagora $r^2 = x^2 + y^2$.

1.5. DEPLASARE

1.5.1. **Cazul mișcării rectilinii.** Fie $A(x_1)$ și $B(x_2)$ pozițiile mobilului la momentele t_1, respectiv t_2 (fig. 1.7). Deplasarea mobilului în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$ este segmentul AB (prevăzut cu semn) $\Delta x = x_2 - x_1$. Litera Δ (delta majusculă) scrisă în fața unei mărimi înseamnă variația acelei mărimi, adică diferența dintre valoarea finală și cea inițială.

Deplasarea mobilului în mișcarea rectilinie este variația coordonatei sale.

Deplasarea Δx este pozitivă dacă mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei ($\Delta x > 0$, $x_2 > x_1$) și negativă dacă mobilul se mișcă în sensul negativ ($\Delta x < 0$) (fig. 1.7).

1.5.2. **Cazul mișcării plane.** Fie A, B pozițiile mobilului la momentele t_1, respectiv t_2 (fig. 1.8). Dacă urmărim proiecțiile mobilului pe axe, se vede că $A'B' = \Delta x = x_2 - x_1$, respectiv $A''B'' = \Delta y = y_2 - y_1$, reprezintă deplasările în direcțiile axelor respective.

Unind poziția inițială $A(t_1)$ a mobilului cu cea finală $B(t_2)$ obținem segmentul de dreaptă orientat $\overrightarrow{AB}$ care se numește *vectorul deplasare* al mobilului în intervalul de timp considerat $\Delta t = t_2 - t_1$.

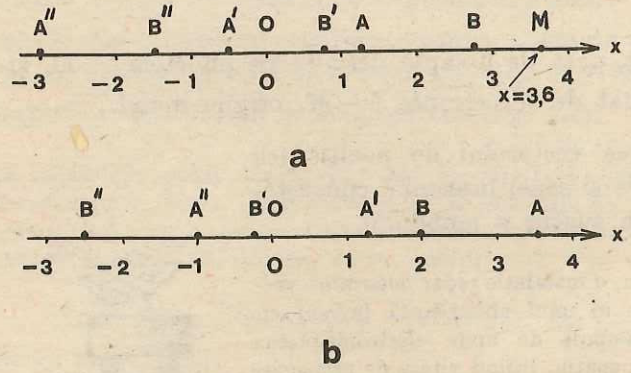


Fig. 1.7. Deplasările AB, $A'B'$, $A''B''$ ale mobilului M în cazul (a) sînt pozitive (mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei Ox), în cazul (b) sînt negative (mobilul se mișcă în sensul negativ al axei Ox).

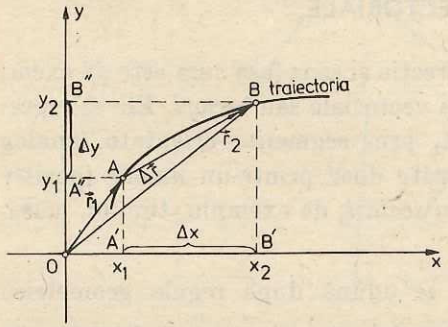


Fig. 1.8. Vectorul deplasare al mobilului $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ are drept componente deplasările pe axe $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ care se obțin prin proiecție, ducînd din originea A și vîrful B paralele la axele de coordonate.

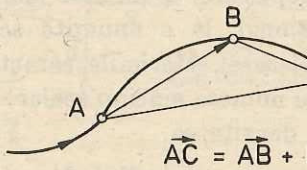


Fig. 1.9. Deplasarea rezu suma vectorială a deplasăr $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$

El este caracterizat de *modul* (lungimea segmentului AB), *di* dreapta care trece prin A și B) și *sens* (de la A la B).

Dacă proiectăm vectorul deplasare $\overrightarrow{AB}$ pe axele de coord din originea A și din vîrful B paralele la axele de coordonate, sările pe axele de coordonate:

$$A'B' = \Delta x = x_2 - x_1,\ A''B'' = \Delta y = y_2 - y$$

Fie un mobil care se mișcă pe o traiectorie curbilinie oar și fie A, B, C pozițiile sale succesive la momentele t_1, t_2, t_3. intervalul de timp (t_1, t_2) este vectorul $\overrightarrow{AB}$, iar în intervalul este $\overrightarrow{BC}$. Care este deplasarea „globală" sau rezultantă în inte (t_1, t_3)?

Evident, este vectorul $\overrightarrow{AC}$, care se obține unind originea p cu vîrful ultimei deplasări. Se spune că vectorul deplasare vectorilor deplasare $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

De exemplu, un avion se deplasează de la București la = 105 km și apoi de la Pitești la Brașov $BC = 100$ km. De tantă București—Brașov este $AC = 140$ km.

Se vede că mărimea deplasării rezultante $\overrightarrow{AC}$ nu se obți adunare *aritmetică* a mărimilor deplasărilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$, ci după tricâ de mai sus.

1.6. MĂRIMI VECTORIALE

Mărimile caracterizate prin modul, direcție și sens (așa cum este de exemplu, vectorul deplasare) se numesc mărimi vectoriale sau *vectori*. Ele se reprezintă, convențional, la o anumită scară, prin segmente orientate (analog vectorului deplasare). Mărimile caracterizate doar printr-un *număr* (pozitiv sau negativ) se numesc mărimi scalare sau *scalari*, de exemplu, timpul, masa, temperatura, densitatea.

1.6.1. **Adunarea vectorilor.** Vectorii se adună după regula geometrică dată la vectorii deplasare. Pentru a aduna doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ îi desenăm (la o anumită scară) unul cu originea în extremitatea celuilalt și unim originea primului vector cu vîrful celui de-al doilea vector (fig. 1.10). Acest vector de închidere va da suma celor doi vectori.

Dacă în figura 1.10 ducem din originea primului vector $\vec{a}$ un vector paralel și egal cu vectorul $\vec{b}$, obținem un paralelogram a cărui diagonală reprezintă suma celor doi vectori. De aici rezultă:

Regula paralelogramului. *Suma a doi vectori este dată de diagonala paralelogramului construit cu cei doi vectori componenți ca laturi, avînd origine comună.*

Din această construcție se vede că suma vectorială este *comutativă*:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}. \tag{1.2}$$

Dacă avem mai mulți vectori suma lor se obține aplicînd succesiv regula paralelogramului. Același rezultat se obține direct cu ajutorul regulii poligonului.

Regula poligonului. *Suma mai multor vectori este dată de linia de închidere a conturului poligonal construit cu vectorii componenți* (fig. 1.11).

Aplicînd regula paralelogramului sau cea a poligonului pentru trei vectori, ne convingem că adunarea vectorilor este *asociativă:*

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}). \tag{1.3}$$

Orice diagramă de compunere a doi vectori (de exemplu, cea din fig. 1.10) poate fi privită și ca o *descompunere* a unui vector în doi vectori compo-

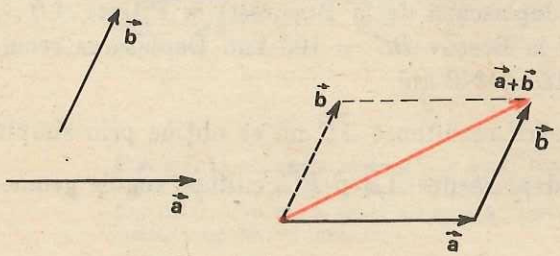


Fig. 1.10. Vectorii se adună după regula paralelogramului.

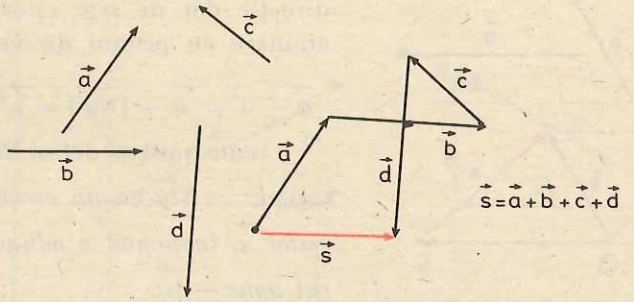


Fig. 1.11. Suma mai multor vectori este dată de linia de închid conturului poligonal construit cu vectorii componenți.

nenți. În adevăr, orice vector poate fi descompus după *două* direc *coplanare* cu vectorul dat (sau după *trei* direcții arbitrare *în spațiu* fi înlocuit cu vectorii *componenți*. Pentru aceasta ducem prin ori vîrful vectorului dat drepte paralele cu direcțiile date (fig. 1.12). astfel paralelogramul de compunere a vectorilor.

Astfel, de exemplu, vectorul de poziție $\vec{r}$ din figura 1.4 are d componenți pe $\overrightarrow{OM'}$ și $\overrightarrow{OM''}$:

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{OM''}$. Analog în spațiu

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M'} + \overrightarrow{M'M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}$.

1.6.2. **Scăderea vectorilor.** Dacă modulul unui vector se red se obține vectorul zero (nul), notat cu 0, ca și numărul zero; direc lui zero rămîne nedeterminată. De exemplu, dacă adunînd mai n linia poligonală se închide, suma vectorilor respectivi este zer cular, dacă adunăm doi vectori egali în modul, de aceeași dire sensuri opuse, obținem vectorul zero. De aici se vede că oricărui $\vec{a}$ îi corespunde un *vector opus* $\vec{a'} = -\vec{a}$, de același modul,

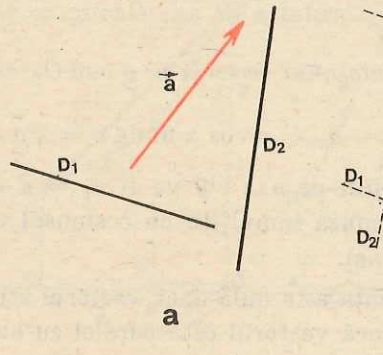


Fig. 1.12. Descompunerea unui vector $\vec{a}$ după două direcții date D_1, D_2 coplanare cu vectorul dat $\vec{a}$.

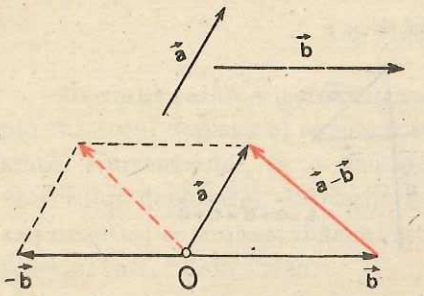


Fig. 1.13. Scăderea vectorilor: diferența este dată de cealaltă diagonală a paralelogramului.

direcție dar de *sens opus*, care prin adunare cu primul dă vectorul zero:

$$\vec{a} + \vec{a}' = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = 0.$$

Acum putem defini scăderea vectorilor: *a scădea un vector* $\vec{b}$ *dintr-un vector* $\vec{a}$, *înseamnă a aduna la* $\vec{a}$ *vectorul opus* $-\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}). \qquad (1.4)$$

Din figura 1.13 se vede că diferența a doi vectori este dată de cealaltă diagonală a paralelogramului construit cu cei doi vectori drept laturi.

Pentru a obține diferența a doi vectori, îi trasăm cu origine comună și unim vîrfurile lor, orientînd săgeata spre vectorul descăzut. Ducînd în figura 1.8 vectorii de poziție $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OB}$, se vede imediat, conform regulii de scădere *vectorială*, că vectorul deplasare $\overrightarrow{AB}$ este egal cu *diferența* vectorilor de poziție ai punctelor A, B, anume $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}$, adică *vectorul deplasare este egal cu variația vectorului de poziție.* Prin variația unui vector se înțelege (la fel ca pentru un scalar) *diferența* — bineînțeles *vectorială* — dintre valoarea *finală* și cea *inițială.*

Un vector este *constant* (în timp) dacă nici modulul, nici *direcția* și nici sensul său nu se schimbă în timp. Variația unui vector constant este nulă.

1.6.3. **Componentele unui vector.** Dacă proiectăm ortogonal un vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ pe o axă Ox, coborînd perpendiculare pe axă din originea A și din vîrful B al vectorului (fig. 1.14), obținem un segment $A'B'$, orientat în sensul pozitiv al axei Ox, dacă unghiul α format de vectorul $\vec{a}$ și axa Ox este ascuțit, și orientat în sensul negativ al axei, dacă unghiul este obtuz. Lungimea acestui segment prevăzută cu semnul plus, respectiv minus, se numește componenta a_x a vectorului $\vec{a}$ pe axa Ox: $a_x = (\pm)\ A'B'$.

Componenta unui vector $\vec{a}$ *pe o axă* Ox *este dată de formula:*

$$a_x = a\cos\alpha \text{ unde } a = |\vec{a}|,\ \alpha = \sphericalangle(\vec{a}, Ox). \qquad (1.5)$$

Componenta pe axa Oy va fi $a_y = a\cos\beta = a\sin\alpha$ (o catetă este egală cu ipotenuza înmulțită cu cosinusul unghiului alăturat sau cu sinusul unghiului opus).

Componenta este nulă dacă vectorul este perpendicular pe axă ($\alpha = 90°$) și este $\pm a$, dacă vectorul este paralel cu axa (respectiv $\alpha = 0$ sau $180°$).

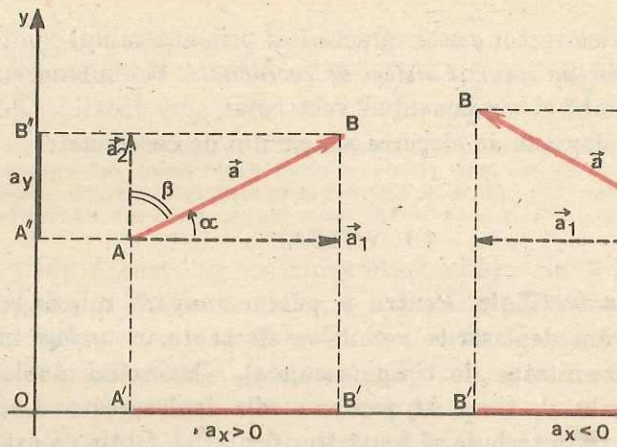


Fig. 1.14. Componentele unui vector pe axele de coord

Dacă adunăm doi vectori $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și proiectăm ve obținem aceeași egalitate și pentru componentele lor: $a_x + b$

În general, orice sumă de vectori poate fi proiectată pe se obține o sumă corespunzătoare pentru componentele ve

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \ldots + \vec{a}_n \Rightarrow \text{pr.}\ \vec{a} = \text{pr.}\ \vec{a}_1 + \text{pr.}\ \vec{a}_2 +$$

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx}.$$

Proiecția rezultantei este egală cu suma proiecțiilor vectorilo componenta pe o axă a rezultantei este egală cu suma comp axă a vectorilor componenți.

Desigur același rezultat se obține și în cazul *diferenț* Astfel, componentele vectorului deplasare $\overrightarrow{AB} = \Delta\vec{r} = \vec{r}_2$ coordonate sînt deplasările pe axe: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y$ Orice egalitate *vectorială* dă prin proiectare pe axele de coo algebrice pentru componentele vectorilor.

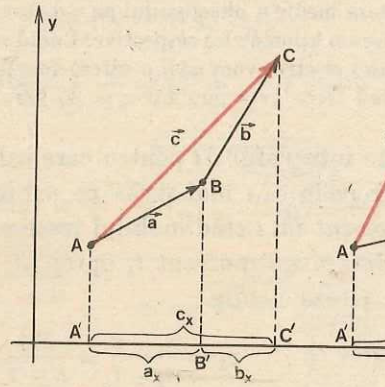


Fig. 1.15. Proiecția sumei a doi vectori este egală cu suma proiecțiilor celor doi vectori.

Prin urmare orice vector $\vec{a}$ este caracterizat prin ansamblul componentelor sale (a_x, a_y, a_z) *într-un anumit sistem de coordonate.* Schimbînd sistemul de coordonate, se schimbă şi componentele vectorului, spre deosebire de un scalar a cărui valoare nu depinde de alegerea sistemului de coordonate.

1.7. VITEZA

1.7.1. **Mişcarea rectilinie.** Pentru a putea compara mişcările între ele trebuie să comparăm deplasările mobilelor efectuate în *acelaşi* interval de timp şi anume în unitatea de timp (secunda). Cunoscînd deplasarea Δx efectuată în intervalul de timp Δt, pentru a afla deplasarea ce *revine* (corespunde) unităţii de timp trebuie să împărţim Δx la Δt. Obţinem astfel viteza medie a mobilului în intervalul de timp considerat:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{deplasare}}{\text{durată}}. \qquad (1.7)$$

Viteza (1.7) are acelaşi semn ca şi deplasarea, deoarece $\Delta t = t_2 - t_1$ este totdeauna pozitiv. Viteza este pozitivă dacă mobilul se mişcă în sensul pozitiv al axei ($\Delta x > 0$, $v_m > 0$) şi este negativă dacă mobilul se mişcă în sensul negativ al axei ($\Delta x < 0$, $v_m < 0$).

EXEMPLU

Un biciclist pleacă din Ploieşti ($x_1 = 60$ km) la ora $t_1 = 8{,}0$ h şi ajunge la Sinaia ($x_2 = 127$ km) la ora $t_2 = 13{,}0$ h. Viteza medie pe această distanţă $\Delta x = x_2 - x_1 =$ $= 67$ km sau pe intervalul de timp respectiv $\Delta t = t_2 - t_1 = 5{,}0$ h este $v_m = \Delta x/\Delta t =$ $= 67$ km/5,0 h $= 13{,}4$ km/h. Dar biciclistul n-a mers tot timpul cu această viteză. La început a mers probabil mai repede, apoi mai încet. Cînd a oprit să se odihnească viteza a fost zero; dacă a pierdut ceva şi s-a întors, viteza a fost negativă. Viteza medie calculată pentru *alte* intervale de timp sau pentru alte distanţe (de exemplu, Ploieşti-Cîmpina, Breaza-Comarnic) a fost *alta*.

Pentru a afla viteza la un moment dat t sau într-un anumit punct x al traiectoriei, de exemplu, viteza biciclistului la Băicoi, în dreptul bornei kilometrice $x = 80$ km, vom măsura viteza medie a biciclistului pe o distanţă *mică*, de exemplu, $\Delta x = 10$ m în vecinătatea bornei kilometrice respective. Luînd o distanţă şi *mai mică*, $\Delta x = 1$ m, şi folosind un ceas electric vom găsi o viteză foarte apropiată de viteza biciclistului în momentul cînd trece prin punctul $x = 80$ km.

Prin urmare, în intervalul Δt pentru care calculăm viteza medie, mobilul poate merge mai repede sau mai încet pe subintervale mai mici. Pentru a afla *viteza la un moment dat* t cînd mobilul trece prin punctul $P(x)$ putem proceda astfel: considerăm un moment t_1 apropiat de t cînd mobilul trece prin $A(x_1)$ şi calculăm viteza medie

$$v_1 = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{PA}{t_1 - t}$$

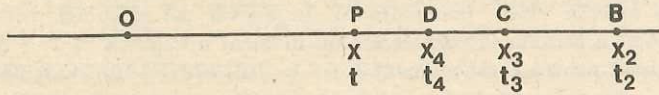


Fig. 1.16. Viteza momentană la momentul t cînd mobilul t obţine calculînd viteza medie pe intervale de timp din ce în $t_3 - t$ etc., cînd mobilul trece prin punctele A, B, C,... cît mai deplasări din ce în ce mai mici: $PA = x_1 - x$, $PB = x$

(fig. 1.16). Aceasta nu redă încă exact viteza din P pe segmentul PA în timpul $t_1 - t$ mobilul poate să-l luăm însă momente t_2, t_3, t_4 etc. din ce în ce mai ap (deci intervale Δt din ce în ce mai mici), cînd mob punctele $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$ etc. din ce în ce mai a (deci deplasări Δx din ce în ce mai mici) şi calculăm zătoare:

$$v_2 = \frac{x_2 - x}{t_2 - t}, \quad v_3 = \frac{x_3 - x}{t_3 - t}, \quad v_4 = \frac{x_4}{t_4}$$

obţinem valori care se apropie din ce în ce mai bin momentul t cînd mobilul trece prin P. Această viteză urmă prin procedeul indicat, se numeşte *viteză mom* sau pe scurt, viteză:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta x \text{ şi } \Delta t \text{ sînt foarte mici (descr}$$

Figura 1.17 ilustrează un experiment pentru s

Viteza momentană diferă în general de la un mo de exemplu în căderea liberă a unei pietre. La vehicu manent de vitezometru.

Observăm că în (1.8) viteza momentană v se obţ mărimi foarte mici Δx şi Δt care descresc simultan că către zero şi se scrie: $\Delta x \to 0$, $\Delta t \to 0$). Deşi Δx şi zero, *raportul* lor $\Delta x/\Delta t$ nu devine în general zero (vit în general nulă). Vom conveni să notăm în cele ce u variaţii foarte mici, care descresc către zero, înlocui cu simbolul d, astfel de exemplu (1.8) se scrie:

$$v = \frac{dx}{dt}, \text{ adică } v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0 \text{ (atunci}$$

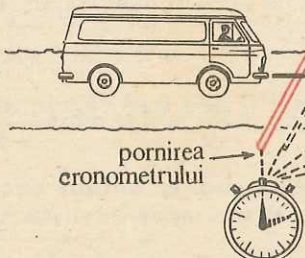


Fig. 1.17. Viteza momentană a unui camion, în momentul t cînd el trece prin punctul P, se poate determina calculînd viteza medie pe distanţe din ce în ce mai mici: PA, PB, PC, PD,... Cronometrul este pornit şi oprit cînd camionul calcă cablurile

Conform procedeului descris, cunoscînd legea mișcării $x = f(t)$ (adică ecuația cinematică a mișcării), putem calcula viteza (momentană). În adevăr, să calculăm viteza mobilului la momentul t. Pentru aceasta să considerăm un moment apropiat $t' = t + \Delta t$. Calculăm coordonata mobilului pentru acest moment t' : $x' = f(t') = f(t + \Delta t)$. Calculăm deplasarea respectivă $\Delta x = x' - x = f(t + \Delta t) - f(t)$, o raportăm la intervalul de timp respectiv $\Delta t = t' - t$ și facem apoi ca Δt să descrească către zero ($\Delta t \to 0$).

EXEMPLE

1. Fie legea mișcării $x = 2t^2 - 3$. Calculăm $x' = 2t'^2 - 3 = 2(t + \Delta t)^2 - 3$. Calculăm deplasarea $\Delta x = x' - x = 2(t + \Delta t)^2 - 3 - (2t^2 - 3) = 4t\Delta t + 2(\Delta t)^2$ și o raportăm la Δt:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4t\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 4t + 2\Delta t.$$

Făcînd acum pe Δt să descrească (să tindă) către zero ($\Delta t \to 0$), ultimul termen se anulează și obținem viteza (momentană):

$$v = \frac{dx}{dt} = 4t.$$

2. Mai general, fie legea mișcării

$$x = At^2 + Bt + C, \tag{1.10}$$

unde A, B, C sînt niște constante (numere).
Calculăm coordonata x' pentru momentul $t' = t + \Delta t$:

$$x' = A(t + \Delta t)^2 + B(t + \Delta t) + C = At^2 + 2At\Delta t + A(\Delta t)^2 + Bt + B\Delta t + C,$$

de unde deplasarea $\Delta x = x' - x = 2At\Delta t + B\Delta t + A(\Delta t)^2$ și viteza medie

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2At + B + A\Delta t.$$

Făcînd acum $\Delta t \to 0$, ultimul termen se anulează și viteza devine:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2At + B. \tag{1.11}$$

Prin urmare, dacă legea mișcării este dată de un polinom de gradul II în timp (funcție pătratică de timp) (1.10), viteza va fi un polinom de gradul I în timp (funcție liniară de timp) (1.11). Vom folosi acest rezultat mai tîrziu.

3. Fie legea mișcării

$$x = At + B, \text{ unde } A, B \text{ sînt constante.} \tag{1.12}$$

Calculăm coordonata x' pentru $t' = t + \Delta t$ și apoi deplasarea $\Delta x = x' - x$:

$$x' = At' + B = A(t + \Delta t) + B;\ \Delta x = x' - x = A\Delta t.$$

Viteza medie

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = A = \text{const} = \frac{dx}{dt} = v. \tag{1.13}$$

Nici nu este nevoie să descreștem pe Δt către zero, deoarece raportul este constant; viteza medie este constantă și coincide cu viteza momentană — mișcarea se numește *rectilinie uniformă*.

1.7.2. **Mișcarea plană.** (Analog se studiază mișcarea
ecuațiile mișcării $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, putem calcula, exa
medii și momentane ale mobilului *în direcțiile axelor*
vitezele respective cu un indice corespunzător axei:

$$v_{xm} = \frac{\Delta x}{\Delta t},\quad v_{ym} = \frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Dacă luăm intervale Δt din ce în ce mai mici, descrescîn
$\Delta t \to 0$ (atunci și $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$), obținem vitezele
$$v_x = \frac{dx}{dt},\quad v_y = \frac{dy}{dt}.$$

Pe de altă parte, deplasările Δx și Δy sînt compon
torului deplasare $\Delta\vec{r}$ (fig. 1.8). Dacă împărțim vectorul
de timp (care este un scalar), obținem *vectorul viteză* m
$$\vec{v}_m = \frac{\overrightarrow{AB}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Vectorul viteză medie are direcția și sensul vectorului
egal cu modulul vectorului deplasare împărțit la interv
nentele vectorului viteză (1.16) pe axe sînt tocmai vite
țiilor mobilului.

1.7.3. **Înmulțirea vectorilor cu scalari.** Dacă adună
însuși obținem un vector de aceeași direcție și acelaș
dublu, ceea ce se scrie astfel: $\vec{a} + \vec{a} = 2\vec{a}$. La fel pent
$$\underbrace{\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{\text{de } n \text{ ori}} = n \cdot \vec{a}.$$

Dacă punem acum:

$$(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a} \text{ și } 0 \cdot \vec{a} = 0,$$

obținem prin generalizare regula înmulțirii vectorilor
scalari).

Prin *înmulțirea* unui vector $\vec{a}$ cu un număr real r
$r\vec{a} = \vec{ar}$ de modul $|r| \cdot |\vec{a}|$ și de aceeași direcție cu
cu $\vec{a}$ dacă $r > 0$ și *opus* lui $\vec{a}$ dacă $r < 0$ (fig. 1.18).

A împărți un vector $\vec{a}$ la un număr real $p \neq 0$ îns
numărul $\frac{1}{p}$:

$$\frac{\vec{a}}{p} = \frac{1}{p} \cdot \vec{a},$$

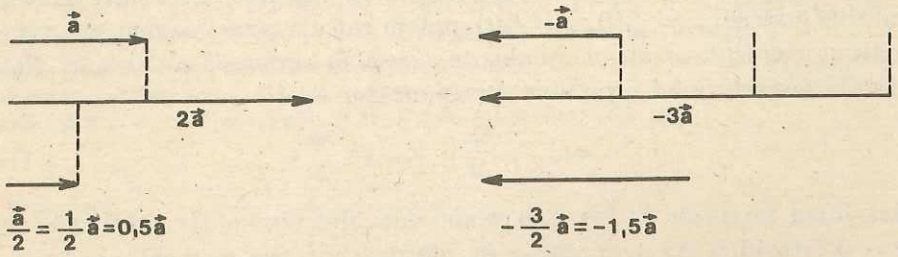


Fig. 1.18. Înmulţirea şi împărţirea vectorilor cu numere (cu scalari).

adică modulul vectorului dat se împarte la $|p|$, direcţia nu se schimbă, iar sensul rămîne acelaşi dacă $p > 0$ şi se inversează dacă $p < 0$. În cazul vitezei (1.16), Δt este totdeauna pozitiv!

Înmulţirea vectorilor cu scalari este *asociativă* şi *distributivă:*

$$m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a},\ (m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a},\ m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}. \quad (1.20)$$

1.7.4. Vectorul viteză. În cazul mişcării *curbilinii* vectorul deplasare $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{AA'}$ şi vectorul viteză medie $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, pentru un interval oarecare, au direcţia *secantei* AA' la traiectorie (fig. 1.19). Pentru a obţine viteza *momentană* într-un punct A al traiectoriei trebuie să luăm un interval $\Delta t = t' - t$ foarte mic, descrescînd către zero, atunci punctul A' se apropie de A, iar secanta AA' se roteşte în jurul punctului A (AA', AA'' etc.) pînă cînd devine *tangentă* la traiectorie (cînd punctele A, A' se confundă), deci vectorul viteză momentană

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \textit{adică}\ \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ \textit{cînd}\ \Delta t \to 0, \quad (1.21)$$

este *tangent la traiectorie* în punctul considerat, adică are direcţia tangentei la traiectorie şi sensul dat de sensul mişcării mobilului în acel moment.

Proiectînd punctul material pe axele de coordonate, mişcarea sa curbilinie în spaţiu $\vec{r} = f(t)$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ se descompune în mişcări rectilinii după axele de coordonate, descrise de ecuaţiile cinematice ale mişcării: $x = f_1(t)$,

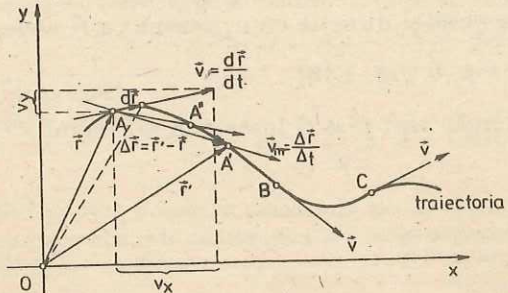


Fig. 1.19. Vectorul viteză medie $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$ are direcţia *secantei* la traiectorie: $\overline{AA'}$. Făcînd pe $\Delta t = t' - t$ să descrească către zero, punctul A' se apropie de A (trecînd prin A'' etc.), secanta se roteşte în jurul lui A şi devine *tangentă la traiectorie*, deci vectorul viteză (momentană) $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ este tangent la traiectorie în fiecare moment şi are sensul dat de sensul mişcării.

$y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. Vitezele mişcărilor componente sînt componentele vectorului viteză $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ al mobilului.

În cazul plan, aplicînd teorema lui Pitagora, avem $r^2 = x^2 + y^2$, $v^2 = v_x^2 + v_y^2$.

În cazul mişcării *rectilinii* vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ şi vectorul viteză $\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ sînt situaţi chiar pe dreapta mişcării; în locul figurii 1.19 vom avea figura 1.20. Alegînd dreapta mişcării drept axă $O'x'$ şi proiectînd pe această axă vectorii $\Delta\vec{r}$, $\vec{v}_m$, $\vec{v}$, obţinem deplasarea $\Delta x'$, respectiv viteza $v_m = \Delta x'/\Delta t$, $v = dx'/dt$ aşa cum le-am definit în § 1.7.1. Observăm că pentru un vector *paralel* cu o axă, componenta (proiecţia) sa pe acea axă este egală cu pl vectorului, după cum acesta este orientat în sensul pozitiv sau ne

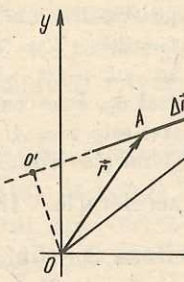


Fig. 1.20. În c
vectorul deplasa
$\vec{v}_m = \Delta\vec{r}/\Delta t$, re
chiar pe dreapt
taţi pe aceast
$v_m = \Delta x$

Dacă vectorul viteză este constant, mişcarea este rectilin
pe scurt, uniformă).

1.8. ACCELERAŢIA

În general vectorul viteză se schimbă în timpul mişcăr
dacă mobilul merge mai repede sau mai încet pe traiector
ţie — dacă traiectoria este *curbilinie.*

O aceeaşi variaţie a vectorului viteză se poate produ
lung sau mai scurt. Pentru a compara *neuniformitatea*
trebuie să calculăm variaţia de viteză în acelaşi interva
(unitatea de timp). De aceea, vom împărţi variaţia vite
timp în care ea s-a produs, pentru a afla variaţia viteze
punde) *unităţii* de timp.

1.8.1. Acceleraţia în mişcarea rectilinie. În cazul *acceleraţia medie* (în intervalul de timp Δt) este

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{variaţia vitezei}}{\text{intervalul de timp}}$$

Ea poate fi pozitivă sau negativă după semnul lui Δv.

Acceleraţia medie caracterizează variaţia globală a Δt, dar pe subintervale de timp mai scurte variaţia vite
Pentru a caracteriza variaţia vitezei „la un moment dat",
(1.22) pentru intervale Δt din ce în ce mai mici, descrescî
obţine astfel acceleraţia *momentană* (sau instantanee):

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}\ \text{cînd}\ \Delta t \to 0\ \text{adică}\ a = \frac{dv}{dt}.$$

De exemplu, fie legea vitezei: $v = 2t - 5$. Calculăm viteza v' la momentul apropiat $t' = t + \Delta t$, anume $v' = 2t' - 5 = 2(t + \Delta t) - 5$. Calculăm acum variația vitezei $\Delta v = v' - v = 2(t + \Delta t) - 5 - (2t - 5) = 2\Delta t$ și o raportăm la intervalul de timp Δt : $a_m = \Delta v/\Delta t = 2$, deci a_m este constantă și coincide cu accelerația momentană. Mai general, dacă legea vitezei este $v = At + B$, unde A, B sînt constante, rezultă $a_m = a = A$ și mișcarea se numește *rectilinie uniform variată*.

1.8.2. **Vectorul accelerație.** În cazul mișcării în *spațiu*, dacă împărțim variația vectorului viteză $\Delta\vec{v}$ (fig. 1.21) la intervalul de timp Δt în care s-a produs, obținem variația *medie* a vectorului viteză pe unitatea de timp, numită *vectorul accelerație medie:*

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\text{variația vectorului viteză}}{\text{intervalul de timp}}. \qquad (1.24)$$

El caracterizează global (în medie) variația *vectorului* viteză în intervalul de timp considerat. Dar în subintervale de timp mai mici variația poate fi diferită. La fel ca în cazul vitezei medii și vitezei instantanee, luînd un interval de timp foarte mic (care descrește către zero), obținem *vectorul accelerație momentană* (sau instantanee), numit pe scurt vectorul accelerație.

Vectorul accelerație (momentană) este variația vectorului viteză calculată pentru un interval de timp foarte scurt în jurul momentului care ne interesează și împărțită la acest interval (pentru a obține variația care *revine unității* de timp):

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0, \text{ adică } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \qquad (1.25)$$

Accelerația medie $\vec{a}_m$ are direcția și sensul vectorului $\Delta\vec{v}$ (fig. 1.21). Cînd îl descreștem pe Δt către zero, vectorul $\vec{a}$ obținut poate diferi, în general, puțin de $\vec{a}_m$ (așa cum $\vec{v}_m$ are direcția secantei, iar $\vec{v}$ are direcția tangentei la traiectorie).

O b s e r v a ț i e. Din figura 1.21 se vede că vectorul accelerație este totdeauna îndreptat spre „interiorul" traiectoriei, adică spre partea concavă

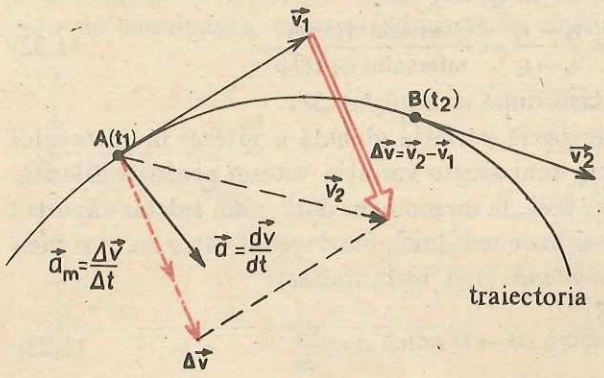


Fig. 1.21. Variația vectorului viteză $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ în intervalul de timp $\Delta t = t_2 - t_1$, vectorul accelerație medie $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta t$ și accelerația momentană $\vec{a} = d\vec{v}/dt$.

a curbei, în sensul în care deviază vîrful vectorului mișcă pe traiectorie. Vectorul accelerație este *paralel* c în cazul mișcării *rectilinii*, cînd numai modulul viteze nînd neschimbată.

Subliniem încă o dată că accelerația caracterizea *vectorului* viteză (calculată pentru unitatea de timp) timp. Dacă vectorul viteză este constant, nu variaz indiferent de valoarea vitezei. Accelerația momentan dacă în acel moment viteza este nulă.

Analog ca pentru vectorul viteză, componenta o axă reprezintă accelerația mobilului în direcția ac accelerația cu care se mișcă proiecția mobilului pe a

$$a_{xm} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ și } a_x = \frac{dv_x}{dt} \left(\text{adică } \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \text{ cînd }\right.$$

În cazul particular al mișcării *rectilinii*, variația interval Δt suficient de mic, deci și vectorul accelera cu vectorul viteză, dacă modulul vitezei crește (mișc sens opus vectorului viteză, dacă modulul vitezei sc (fig. 1.22).

Accelerația (1.22—1.23) definită mai sus în cazul zintă componenta vectorului accelerație $\vec{a}_m = \Delta\vec{v}/\Delta$ mișcării Ox și este pozitivă dacă vectorul accelerație pozitiv al axei. Mișcarea este *accelerată*, dacă viteza v *semn*, și *încetinită*, dacă au *semne opuse*.

E X E M P L U

Un tren care se mișcă cu viteza de 90 km/h este la un n în 20 secunde viteza sa scade la 18 km/h. Să se calculez mișcare încetinită.

Rezolvare. Alegem sensul pozitiv pe traiectorie în sensu $v_1 = +90$ km/h $= 25$ m/s, $v_2 = +18$ km/h $= 5$ m/s ș

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{5 - 25 \text{ m/s}}{20 \text{ s}} = -1$$

Semnul minus arată că vectorul accelerație este orie pozitiv ales și cum viteza este pozitivă, semnul este încetinit al mișcării ($v > 0$, $a < 0$).

O b s e r v a ț i i. **1.** În cazul mișcării rectilinii, s accelerației a depind atît de sensul mișcării mobil *pozitiv pe axa mișcării*. Dacă schimbăm sensul pozit cît și a își schimbă *amîndouă* semnul (de aceea cara tinit nu depinde de sensul ales pozitiv pe axa mișc

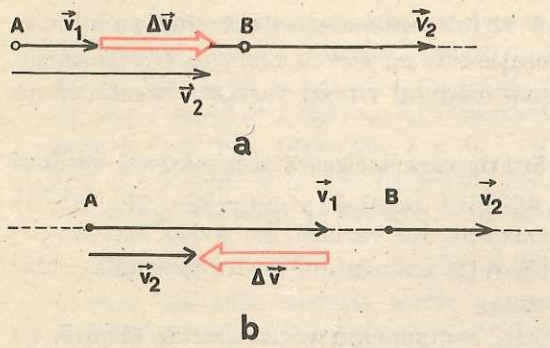


Fig. 1.22. În mişcarea rectilinie accelerată vectorii viteză şi acceleraţie au acelaşi sens (*a*), iar în mişcarea încetinită ei au sensuri opuse (*b*).

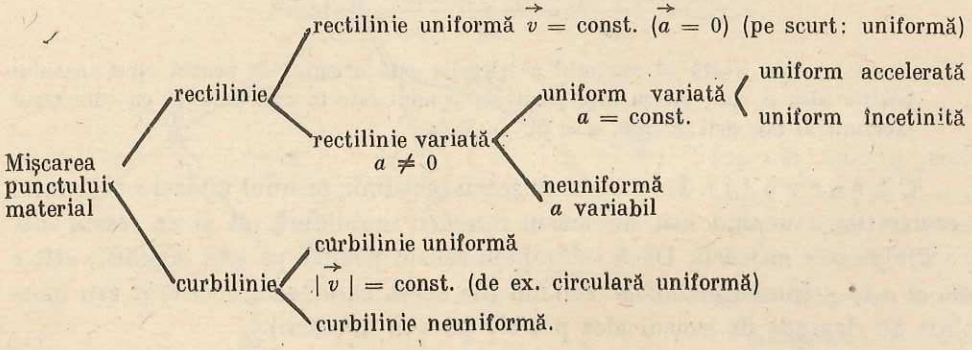
Aproape totdeauna se alege sensul pozitiv pe axa mişcării în sensul *vitezei* (al mişcării); *în acest caz* $a > 0$ înseamnă accelerare şi $a < 0$ înseamnă frînare.

2. În cazul mişcării *rectilinii*, acceleraţia medie, conform formulei (1.22) ne arată cu cît variază *în medie* în unitatea de timp (1 s) viteza corpului (pentru fiecare secundă din intervalul de timp Δt pentru care a fost calculată acea acceleraţie medie). În adevăr, din (1.22) avem $\Delta v = a_m \Delta t$ şi pentru $\Delta t = 1$ s, rezultă $\Delta v = a_m$. De exemplu, dacă acceleraţia unui tren este $a = 2{,}0$ m/s², înseamnă că viteza sa creşte în fiecare secundă cu 2,0 m/s. Caracterul accelerat sau încetinit depinde şi de semnul vitezei: dacă $v > 0$, trenul este accelerat, dacă $v < 0$, el este frînat. *Doar* semnul acceleraţiei *singur* nu ne spune încă despre caracterul accelerat sau încetinit al mişcării.

Iată încă un exemplu. Dacă vectorul acceleraţie al unui lift este îndreptat în sus, aceasta înseamnă *fie* pornire accelerată în sus *fie* frînare la coborîre. Dacă vectorul acceleraţie al liftului este îndreptat în jos, aceasta înseamnă *fie* pornire accelerată în jos *fie* frînare la urcare.

Exemple de acceleraţii. Acceleraţia gravitaţională de cădere liberă a corpurilor pe suprafaţa pămîntului $g = 9{,}8$ m/s², pe suprafaţa Lunii 1,62 m/s², pe suprafaţa Soarelui 271 m/s², pe Marte 3,77 m/s². Acceleraţia unui electron într-un atom de hidrogen $0{,}9 \cdot 10^{22}$ m/s². Un om suportă în mod acceptabil acceleraţii pînă la de cinci ori acceleraţia gravitaţională.

1.9. CLASIFICAREA MIŞCĂRILOR PUNCTULUI MATERIAL



Am văzut că noţiunile de repaus şi de mişcare la un sistem de referinţă. Acelaşi lucru este valab adică nu numai viteza, ci şi forma traiectoriei depin rinţă ales. Uneori în loc de sistem de referinţă se spu totdeauna un observator studiază fenomenele faţă d legat de el (sistem de coordonate, riglă şi ceasornic) sidera că în oricare sistem de referinţă se află un fenomenele.

Pentru exemplificare se consideră un observa ce se mişcă orizontal cu viteza constantă $\vec{v}$. Obser obiect. Pentru observatorul din tren obiectul este reduce la un punct, deplasarea şi viteza sînt zero. P Pămînt, obiectul se deplasează orizontal cu viteza traiectoria este o dreaptă orizontală.

Dacă observatorul din vagon scapă obiectul di vertical în jos faţă de vagon, dar faţă de observatoru va descrie o traiectorie curbilinie şi vectorul viteză bilă în timpul căderii (fig. 1.23).

Un alt exemplu îl constituie un obiect lăsat libe (fig. 1.24). Pentru un observator terestru, traiectoria

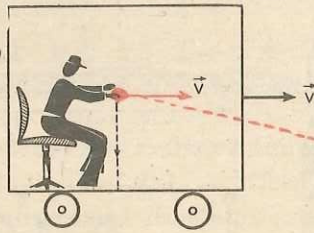


Fig. 1.23. Traiectoria şi viteza unui obiect care cade într-un vagon în mişcare sînt diferite pentru observatorul din vagon şi pentru observatorul de pe Pămînt.

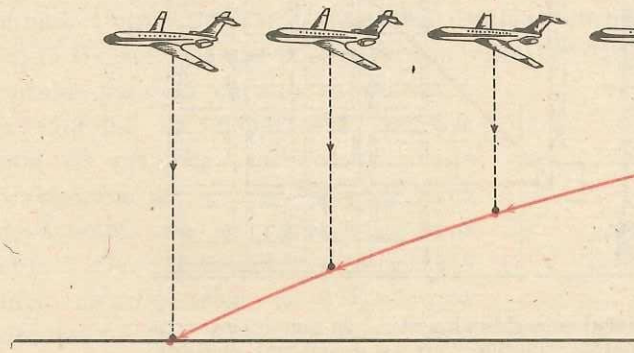


Fig. 1.24. Traiectoria şi viteza obiectului lansat din avion pentru observatorul terestru.

celei din exemplul precedent, în timp ce pentru aviator traiectoria va fi practic (dacă neglijăm rezistența aerului) o linie verticală, tot timpul sub avion, dacă avionul continuă să zboare orizontal rectiliniu uniform.

Astfel de exemple ne demonstrează relativitatea *traiectoriei*, *deplasării* și *vitezei*.

1.11. COMPUNEREA MIȘCĂRILOR

Un corp poate participa simultan la două mișcări. Cum se compun ele pentru a da mișcarea rezultantă?

De exemplu, un om se plimbă într-un vagon, care la rîndul său se află în mișcare (sau un obiect cade într-un vagon în mișcare). Cunoscînd cele două mișcări, cum aflăm mișcarea rezultantă a omului (obiectului) față de pămînt? Sau, cunoaștem mișcarea unui satelit artificial față de Pămînt și mișcarea Pămîntului față de Soare, cum calculăm mișcarea satelitului față de Soare?

Alt exemplu: un bloc este ridicat în sus prin intermediul unui scripete și în același timp scripetele se deplasează orizontal de-a lungul brațului macaralei. Care va fi mișcarea (viteza) rezultantă (fig. 1.25)?

Care vor fi deplasarea și viteza rezultantă a bărcii față de mal, dacă se vîslește pe o direcție perpendiculară pe cursul apei unui rîu (fig. 1.26)?

Studiind exemplele de mai sus, constatăm că *deplasările și vitezele se compun după regula paralelogramului, ca orice vectori.*

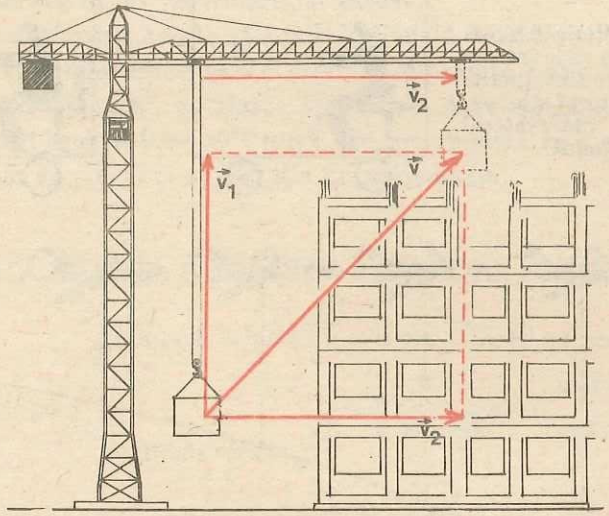


Fig. 1.25. Blocul este ridicat vertical în sus cu viteza $\vec{v}_1$ față de scripetele superior, care se deplasează orizontal cu viteza $\vec{v}_2$. Care este viteza rezultantă $\vec{v}$ a blocului față de pămînt?

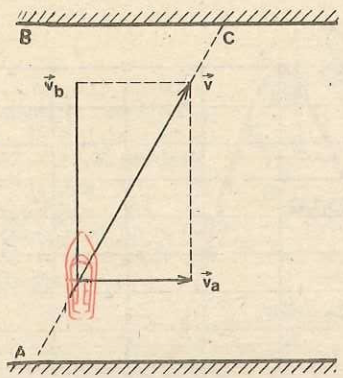


Fig. 1.26. Compunerea vitezelor. Viteza bărcii față de
pune vectorial cu viteza apei $\vec{v}_a$ pentru a da viteza
țărm: $\vec{v} = \vec{v}_b + \vec{v}_a$. Cum trebuie orientată viteza bărcii
tru a ajunge *perpendicular* pe celălalt mal? Cînd este

1.12. REPREZENTAREA GRAFICĂ A LEGII

Legea mișcării poate fi determinată experimenta
forma unui tabel:

t (în s)	−3	−2	−1	0	1	2	3
x (în m)	−0,2	0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,4

Este util și sugestiv de reprezentat *grafic* legea m
„coordonată-timp". Pe axa orizontală marcăm timp
venabilă, iar pe axa verticală — coordonata x într-o
(fig. 1.27). Un punct P de pe această diagramă rep
coordonata x a mobilului la un moment t. Cînd mobilul
schimbă în timp și punctul *reprezentativ* descrie o curbă
repaus (x fix sau constant în timp) curba reprezentativă
orizontală, paralelă cu axa timpului Ot.
Dacă mobilul se depărtează sau se apropie de originea coordonatelor de pe traiectoria sa, curba reprezentativă se depărtează sau se apropie de axa orizontală Ot. Cînd mobilul trece prin originea coordonatelor ($x = 0$), curba reprezentativă taie axa timpului. Curba reprezentativă a legii de mișcare $x = f(t)$ nu are nici o legătură cu traiectoria.

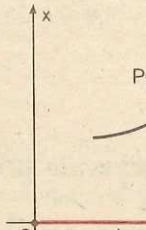


Fig. 1.27. R

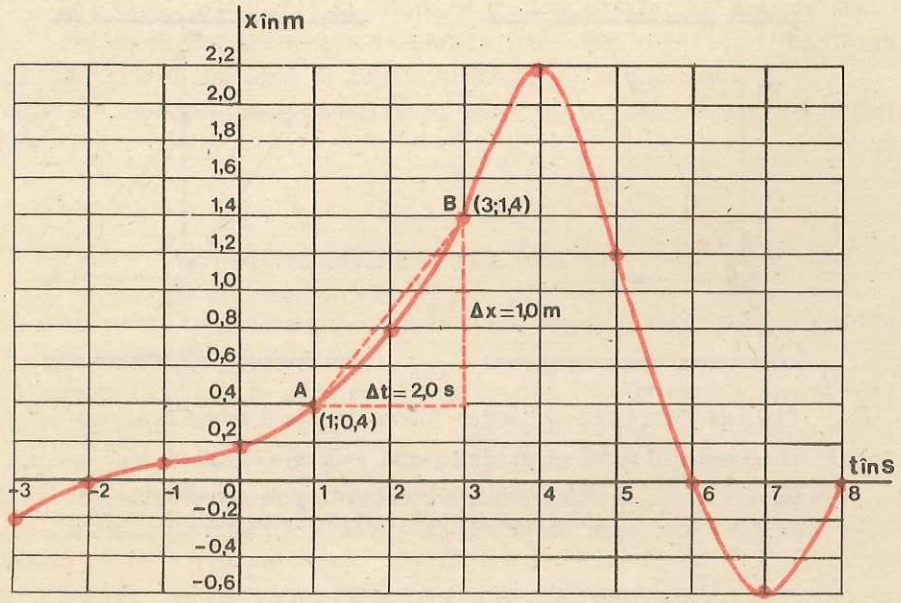


Fig. 1.28. Reprezentarea grafică a legii mişcării $x = f(t)$.

În exemplul din figura 1.28 la momentul (iniţial) $t = 0$ mobilul se afla la distanţa $x_0 = 0{,}20$ m de origine (coordonata iniţială). În „trecut" ($t < 0$) mobilul a trecut prin origine la momentul $t = -2{,}0$ s, venind din partea negativă a traiectoriei. La momentul $t = 4{,}0$ s mobilul se afla la distanţa maximă de origine: $x = 2{,}20$ m, după care a început să se apropie de origine foarte repede. La $t = 6{,}0$ s mobilul ajunge în origine şi trece de partea cealaltă „negativă" a traiectoriei, depărtîndu-se cel mai mult ($x = -0{,}60$ m) la $t = 7{,}0$ s, după care se întoarce din nou în origine la $t = 8{,}0$ s.

Viteza medie pe diferite intervale de timp se poate calcula din tabel sau din grafic. Astfel, viteza medie în intervalul (1,0; 3,0) s este:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{1{,}40 - 0{,}40}{3{,}0 - 1{,}0}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}50 \text{ m/s}.$$

Viteza medie în intervalul (−3,0; 0,0) s este:

$$v_m = \frac{0{,}20 - (-0{,}20)}{0{,}0 - (-3{,}0)}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{0{,}40}{3{,}0}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}13 \text{ m/s}.$$

EXPERIMENTE

Se vor face experimente privind mişcarea rectilinie cu ajutorul Trusei le fizică pentru licee.

Montajul *mecanic* (fig. 1.29) conţine o bară (*66*) pe care rulează un cărucior (*27*) a cărui mişcare se studiază. Montajul *electric* (fig. 1.29, 1.30 şi 1.31) conţine un electromagnet (*20*) pentru reţinerea cărucioruluí, întrerupătoarele *ND* (*18*)

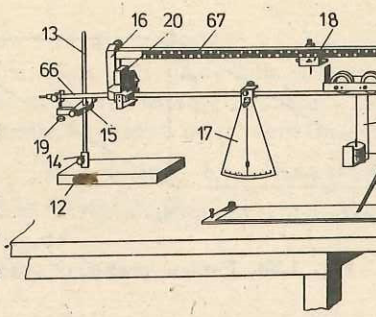


Fig. 1.29. Montaj pentru studiul mişcării rectilinii: *66* — bara de rulare, *27* — cărucior, *67* — riglă gradată, *18* — întrerupător *ND* (*1*), *23* — întrerupător *NI* (*2*), *20* — electromagnet, *28* — inscriptor, *30* — dispozitiv de înregistrare.

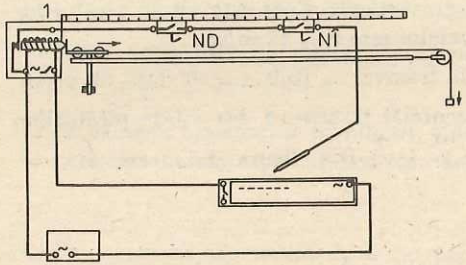
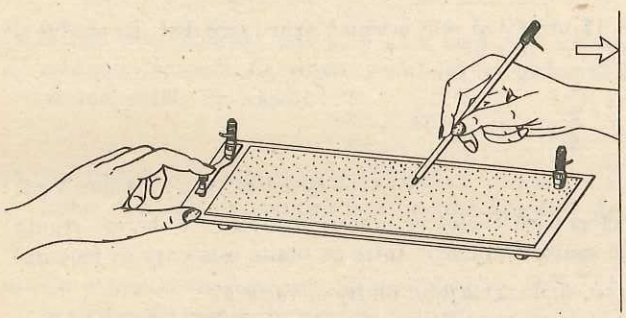


Fig. 1.30. Montajul electric.



(normal deschis) şi *NI* (*23*) (normal închis) şi un inscrip timpului (fig. 1.32) se face printr-o metodă chimică fo nativ.

Se fac experienţe de măsurare a vitezei *medii* pe Se fixează pe rigla gradată (*67*) întrerupătoarele la acea soară timpul Δt, atunci $v_m = \Delta x/\Delta t$.

PROBLEME REZOLVATE

1. *a)* Putem vîsli pe un rîu astfel încît barca să rămînă pe loc deplasa un om pe o scară rulantă astfel încît să fie în repau

Rezolvare. Dacă barca are faţă de apă exact viteza apei dar î

pe loc faţă de mal. La fel, dacă omul are faţă de scară o vit

aceeaşi direcţie, dar de *sens opus* cu viteza scării $\vec{v}$, adică pe loc faţă de pămînt.

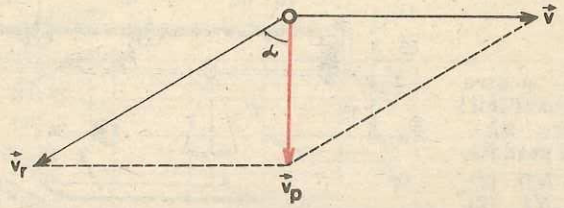


Fig. 1.33. Pentru problema rezolvată *2*.

2. Picăturile de ploaie, care cad vertical, formează pe geamurile unui tramvai în mișcare urme înclinate sub un unghi $\alpha = 60°$ față de verticală. Care este viteza picăturilor de ploaie (față de pămînt) dacă viteza tramvaiului este $v = 12$ m/s?

Rezolvare. Viteza picăturilor de ploaie față de tramvai $\vec{v_r}$ (sub $\alpha = 60°$ față de verticală), compusă cu viteza tramvaiului $\vec{v}$ (orizontală) trebuie să dea viteza picăturilor de ploaie față de pămînt (verticală): $\vec{v_p} = \vec{v_r} + \vec{v}$. Din figura 1.33 rezultă $v_p = v \operatorname{ctg} \alpha = 7{,}0$ m/s.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un vector $\vec{a}$ are modulul $a = 12$ unități și este orientat exact spre Est. Ce modul și ce orientare au vectorii:

$$1{,}5\,\vec{a};\ \frac{\vec{a}}{4};\ -\vec{a};\ -0{,}5\vec{a};\ -\frac{\vec{a}}{3}?$$

R: 18; 3 spre Est; 12; 6; 4 spre Vest.

2. Cum se compun mai mulți vectori dacă ei sînt pe aceeași dreaptă? Ce devine regula paralelogramului în cazul a doi vectori coliniari? Între ce limite este cuprins modulul sumei și diferenței a doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, dacă unghiul dintre ei variază?

R: algebric: $a + b \geqslant |\vec{a} \pm \vec{b}| \geqslant |a - b|$.

3. Pot fi combinați doi vectori de mărimi diferite astfel încît să dea rezultantă (sumă) nulă? Dar trei vectori?

R: nu; da în anumite condiții (cînd reprezintă laturile unui triunghi).

4. Este operația de scădere vectorială, comutativă și asociativă?

R: nu.

5. Cum sînt vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ dacă sînt valabile relațiile: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și $a + b = c$? Dar în cazul $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$? Dar în cazul $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ și $a^2 + b^2 = c^2$?

R: $\vec{a} \parallel \vec{b}$; $\vec{b} = 0$; $\vec{a} \perp \vec{b}$.

6. În ce fel de mișcare distanța parcursă coincide cu modulul vectorului deplasare?

R: în mișcarea rectilinie cînd viteza nu schimbă semnul.

7. Suma pe care o plătim la un taxi este proporțională cu: „distanța parcursă" sau cu „modulul vectorului deplasare"?

R: cu distanța parcursă.

8. Pentru mișcarea din figura 1.28 să se calculeze: *a)* viteza m
valele de timp: (1, 0; 4,0)s; (4,0; 6,0)s; (6,0; 7,0)s și (6,0;
de timp viteza medie este nulă? *b)* Distanța străbătută de
cării. Care a fost viteza medie, în modul, pe întregul interva

R: *a)* 0,60; −1,1; −0,60 și 0,0

9. Poate un mobil avea o viteză îndreptată spre Est și în același
tată spre Vest sau spre Nord?

10. Poate avea un corp viteză nulă, la un moment dat, și acce

11. Poate varia direcția vitezei unui mobil dacă vectorul acc

12. Un camion, mișcîndu-se curbiliniu, a descris o traiectorie sub
Care este distanța parcursă și care este modulul vectorulu

13. Un vapor se deplasează $d_1 = 7{,}0$ km spre Est, apoi în c
spre N—V. Care este deplasarea rezultantă?

14. Viteza unui biciclist este $v_1 = 14{,}4$ km/h, iar viteza vîntul
este $v_2 = 4{,}0$ m/s. Ce viteză a vîntului înregistrează biciclis
vîntul suflă din spate?

R: $v' = v_1 \pm$

15. Un tractor cu șenile se mișcă cu viteza $v = 3{,}0$ m/s. Care
rioare și a celor superioare față de sol? Dar față de tracto

R: *a)* 0 și $2v = 6$,

16. Un avion cu elice zboară rectiliniu uniform. Care va fi trai
în sistemul de referință legat de: *a)* elice; *b)* avion; *c)* pămî

R: *a)* punct; *b)* cerc; *c)* el

17. Ecuațiile mișcării a cinci puncte materiale sînt următoar
$x = -1 + 2t$; $x = 2 - t$; $x = 3$. Să se reprezinte grafic
diagramă Otx. Ce semnificație au punctele de intersecție a gr
Ox, Ot?

R: coordonata inițială (la $t = 0$); momentul trecerii p

2

PRINCIPIILE MECANICII NEWTONIENE

Mecanica clasică, elaborată în esență de ISAAC NEWTON (1643—1727) se bazează pe trei legi foarte generale, numite *principii*. Separat de aceste principii NEWTON a formulat principiul suprapunerii forțelor. Toate celelalte legi ale mecanicii newtoniene se deduc atunci din aceste principii ca teoreme.

2.1. PRINCIPIUL INERȚIEI (lex prima)

Un tren se mișcă rectiliniu uniform numai dacă este tras de locomotivă altfel ar merge încetinit și pînă la urmă s-ar opri. La fel se întîmplă cu diferite alte vehicule.

Să facem o experiență simplă: să lăsăm o bilă de oțel pe un plan orizontal dur și foarte bine lustruit (din sticlă), vom constata că ea se mișcă (rostogolindu-se) practic *rectiliniu uniform* mult timp. În schimb, o placă de lemn lansată pe un plan orizontal tot din lemn sau din cauciuc se oprește aproape imediat. De ce? Fiindcă este puternic frînată de planul orizontal aspru (rugos) *prin frecare*, deci *prin acțiunea unui alt corp*.

Dacă am elimina acțiunile tuturor corpurilor înconjurătoare, adică am *izola* un corp aflat în mișcare, s-ar opri el oare?

Pe măsură ce diminuăm frecările și alte acțiuni ale mediului, constatăm că mișcarea corpului se apropie tot mai mult de mișcarea rectilinie uniformă (de exemplu, mișcarea pe o linie cu pernă de aer). De aici prin idealizare sau abstractizare se ajunge la *principiul I al dinamicii* (principiul inerției):

un punct material își menține starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă atît timp cît asupra sa nu acționează alte corpuri care să-i schimbe această stare de mișcare.

Acest principiu a fost descoperit de GALILEO GALILEI în 1632 și formulat de ISAAC NEWTON drept principiu I al dinamicii (lex prima) (1686).

GALILEO GALILEI (1564—1642) mare învățat italian, astronom, fizician, mecanician, unul din fondatorii științelor exacte ale naturii. A descoperit legea inerției, legile căderii corpurilor, legile pendulului. Pentru prima dată în istoria astronomiei, cu ajutorul unei lunete confecționate de el însuși, a observat corpurile cerești, descoperind munții de pe Lună, patru sateliți ai planetei Jupiter, fazele planetei Venus, structura stelară a Căii Lactee, petele pe Soare. În cartea sa „Dialog asupra celor două sisteme principale ale lumii, ptolemaic și copernican" (1632) a dezvoltat strălucit învățătura lui N. Copernic asupra sistemului solar, pentru care în 1633 a fost osîndit de un tribunal catolic.

Cum se explică atunci faptul că în practică mișca
a vehiculelor trebuie permanent întreținută prin acți
(motor)? În asemenea cazuri există totdeauna acți
obicei frecările, care trebuie învinse sau compensat
acțiunile asupra punctului material se compensează
în repaus sau în mișcare rectilinie uniformă.

2.1.1. **Inerția și masa.** Pentru a pune în mișcare
sau pentru a-i curba traiectoria (a-i schimba vecto
acționăm asupra sa. La orice acțiune exterioară care ca
de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă, corpul

Se numește *inerție* proprietatea unui corp de a-și *m*
sau de mișcare *rectilinie uniformă* în absența acțiunil
de a se *opune* (reacționa) la orice acțiune exterioară c
starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă

Principiul I al dinamicii se numește și *principiul*
proprietatea enunțată în el este o manifestare a inerț
izolat se află în repaus sau se mișcă rectiliniu uniform
măsură a inerției este *masa*. În această calitate mas
(sau inertă).

2.2. SISTEME DE REFERINȚĂ INERȚ

Dacă un corp izolat se mișcă rectiliniu uniform fa
repaus față de stele), atunci față de Pămînt el se miș
rotației proprii diurne a Pămîntului, iar față de o na
față de stele, el se mișcă accelerat. De aici rezultă evide
nu poate fi valabil în orice sistem de referință.

Sistemele de referință în care este valabil princi
sisteme de referință *inerțiale*.

Vom arăta că toate sistemele de referinţă inerţiale se mişcă unele faţă de altele *rectiliniu uniform.*

Experienţa arată că sistemele de referinţă legate de stele sau chiar de Soare sînt sisteme de referinţă inerţiale cu un mare grad de precizie. În schimb, sistemele de referinţă legate de Pămînt nu sînt riguros inerţiale din cauza rotaţiei Pămîntului faţă de stele. În majoritatea covîrşitoare a nevoilor practicii, Pămîntul poate fi însă considerat sistem de referinţă inerţial cu un suficient grad de precizie.

Peste tot, în cele ce urmează, în rezolvarea problemelor, se înţelege că se foloseşte un sistem de referinţă *inerţial* (de obicei legat de Pămînt).

Principiile mecanicii newtoniene sînt valabile în sistemele de referinţă inerţiale (se va arăta la § 2.6).

2.2.1. **Transformarea Galilei.** Un acelaşi eveniment sau proces (de exemplu mişcarea unui punct material) poate fi studiat din două sisteme de referinţă diferite — vom spune, de către doi observatori diferiţi. Un eveniment este caracterizat prin coordonatele sale spaţiale x, y, z, care arată locul unde se produce evenimentul, şi prin coordonata temporală t, care arată momentul la care se produce evenimentul. Fiecare observator măsoară coordonatele evenimentelor cu instrumentele *sale* (rigla şi ceasornicul) şi stabileşte legile corespunzătoare.

Este important de stabilit legătura dintre coordonatele unui eveniment măsurate de diferiţi observatori, adică *transformările de coordonate care dau trecerea de la un sistem de referinţă la altul.*

Astfel putem vedea care aspecte ale fenomenelor şi legilor sînt *relative*, adică dependente de sistemul de referinţă, şi care sînt *invariante*, adică independente de sistemul de referinţă (aceleaşi pentru toţi observatorii).

Vom presupune că riglele şi ceasornicele diferiţilor observatori sînt *construite şi etalonate identic*, adică după aceeaşi „reţetă" (acelaşi procedeu tehnologic).

Fie două sisteme de referinţă S şi S' cu axele paralele (axele Oz, $O'z'$ nu sînt desenate). Presupunem că S' se mişcă faţă de S cu viteza $\vec{u}$ *constantă*, astfel încît originile O, O' au coincis la momentul $t = t' = 0$, unde t este timpul măsurat în S, iar t' în S'.

Din punctul de vedere al observatorului S, aplicînd regula compunerii vectoriale, rezultă conform figurii 2.1:

$$\vec{r} = \vec{r'} + \vec{r}_0 = \vec{r'} + \vec{u}t, \qquad (2.1)$$

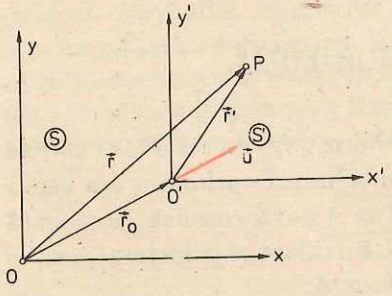


Fig. 2.1. Două sisteme de referinţă care se mişcă rectiliniu uniform unul faţă de altul. Transformările Galilei.

unde toţi vectorii sînt măsuraţi cu instrumentele din S. Noi vrem însă să stabilim legătura dintre coordonatele $(\vec{r}, t)$ ale unui eveniment P, măsurate de observatorul S cu instrumentele *sale*, şi coordonatele $(\vec{r'}, t')$ ale aceluiaşi eveniment dar măsurate de observatorul S' *cu instrumentele* **sale.** Or, instrumentele (rigla şi ceasornicul) din S' se află în mişcare faţă de S! Oare distanţa $O'P$ măsurată de fiecare observator cu instrumentele *sale* va fi aceeaşi?

În mecanica clasică newtoniană se consideră că lungimile (distanţele) şi duratele au caracter *invariant* (sau *absolut*) adică rezultatele măsurătorilor de lung
nici de mişcarea instrumentelor de măsură, nici de mişcarea

Această ipoteză este foarte bine verificată în domeniul
pentru viteze cosmice), dar în domeniul vitezelor foarte mari, a
$c = 3 \cdot 10^8$ m/s (de exemplu, în cazul particulelor atomice), ac
exactă şi trebuie aplicată mecanica relativistă.

Rămînînd în cadrul mecanicii clasice, putem considera că
caracter invariant. Astfel, timpul „curge" la fel în cele două sist
alegerea noastră a momentelor iniţiale ($t = t' = 0$) rezultă per
(2.1) putem considera $\vec{r}$ măsurat în S, iar $\vec{r'}$ *măsurat în* S', astfel
transformări Galilei:

$$\begin{cases} \vec{r} = \vec{r'} + \vec{u}t', \\ t = t' \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{r'} = \vec{r} - \vec{u}t \\ t' = t. \end{cases}$$

Din transformările Galilei rezultă imediat legea clasică d
În adevăr, considerînd două poziţii consecutive la două mome

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}'_1 + \vec{u}t_1 \\ t_1 = t'_1 \end{cases} \text{şi} \quad \begin{cases} \vec{r}_2 = \vec{r}'_2 + \vec{u}t'_2 \\ t_2 = t'_2 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{array}{l} \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \\ \Delta t = t_2 - t_1 = t \end{array}$$

Împărţind ultimele două relaţii membru la membru, găsim lege
vitezelor:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r'}}{\Delta t'} + \vec{u} = \vec{v}'_m + \vec{u}, \quad \vec{v} = \vec{v'}$$

unde $\vec{v'}$ este viteza relativă a mobilului faţă de S', $\vec{u}$ — viteza
şi $\vec{v}$ — viteza rezultantă faţă de S.

Dacă acum considerăm vitezele la două momente consecu

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{u}, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{u}, \quad \Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}$$

şi împărţind la intervalul de timp $\Delta t = \Delta t'$, obţinem pentru ac

$$\vec{a}_m = \vec{a}'_m \text{ şi } \vec{a} = \vec{a'},$$

adică *acceleraţia este aceeaşi în toate sistemele de referinţă în r*
uniformă ($\vec{u} = \text{const}$), deci acceleraţia este *invariantă* faţă de ace

În particular, dacă acceleraţia este nulă într-un sis
este în repaus sau se mişcă rectiliniu uniform, atunci accel
care alt sistem S' mişcat *rectiliniu uniform* faţă de primul,
repaus sau în mişcare rectilinie uniformă în toate aceste sist
în mişcare relativă rectilinie uniformă unele faţă de altele.
este valabil într-unul din ele, deci acesta este un sistem de r
acest principiu va fi valabil în toate aceste sisteme de referin
nea inerţiale. Reciproc, dacă două sisteme de referinţă sînt ine
unul faţă de altul rectiliniu uniform [altfel (2.4) n-ar fi valabilă
invariantă, deci mişcarea inerţială, cu $\vec{a} = 0$ într-unul din siste
în celălalt].

2.3. PRINCIPIUL FUNDAMENTAL AL DINAMICII (lex secunda)

În procesele de *ciocnire* a două corpuri, de *frecare* între două corpuri solide sau între un solid şi un fluid, de *atracţie sau respingere* între corpuri magnetizate sau electrizate etc., corpurile acţionează reciproc, unele asupra altora, adică *interacţionează*. Ca efect al interacţiunii corpurile în general se deformează reciproc şi se schimbă starea lor de mişcare, adică se schimbă vectorul viteză.

I. NEWTON a explicat căderea corpurilor ca efect al interacţiunii *gravitaţionale* dintre corp şi Pămînt. Acesta este un caz particular al *interacţiunii gravitaţionale* sau *atracţiei universale* dintre oricare două corpuri. Un corp suspendat de un resort întinde resortul, iar lăsat liber cade accelerat datorită atracţiei *reciproce* dintre corp şi Pămînt.

O măsură a interacţiunii este *vectorul forţă*. Astfel, corpurile care interacţionează exercită unul asupra celuilalt cîte o forţă. Acţiunile diferitelor corpuri înconjurătoare asupra unui corp dat se manifestă prin forţe aplicate acestuia. Prin intermediul forţelor aplicate unui corp se transmite mişcarea mecanică.

Forţele se compun după regula paralelogramului ca orice vectori.

Exemple de forţe. Toate forţele din natură se reduc pînă la urmă la un număr mic de forţe *fundamentale*, corespunzător interacţiunilor fundamentale.

a) Una dintre acestea este *forţa de atracţie gravitaţională*, care se exercită între oricare corpuri şi depinde numai de masa lor şi de distribuţia substanţei, indiferent de natura ei chimică.

Legea atracţiei universale a fost descoperită de Isaac Newton şi aplicată la mişcarea corpurilor cereşti (1687).

b) Un alt exemplu de forţe sînt *forţele electrice*. Ele sînt forţe de interacţiune între corpurile electrizate. Ştim că prin frecare, de exemplu, corpurile se electrizează şi între ele se exercită forţe de respingere sau de atracţie.

Forţele elastice sînt forţe care apar în corpurile deformate*. Ele se reduc pînă la urmă la forţe *electrice*. În adevăr, prin deformarea unui solid, ionii, atomii sau moleculele sale constituente sînt dislocate din poziţiile lor de echilibru şi se nasc forţe *electrice* care tind să restabilească echilibrul.

Forţele de frecare se reduc pînă la urmă tot la forţe *electrice*.

Orice forţă aplicată unui corp îi modifică vectorul viteză, adică îi imprimă o *acceleraţie*. Din experienţa de toate zilele ştim că *aceeaşi* forţă aplicată diferitelor corpuri produce variaţii diferite ale vitezei, fiindcă efectul depinde şi de *inerţia* corpului, adică de *masa* sa. Cu cît masa este mai mare cu atît variaţia de viteză, la aceeaşi forţă aplicată, în acelaşi interval de timp, este mai mică. Ne putem da seama de acest fapt cînd tragem sau împingem cu *aceeaşi* forţă acelaşi cărucior gol apoi încărcat.

* Acest tip de forţă va fi studiat mai pe larg la § 3.6.

ISAAC NEWTON (1643—1727) a fost un mare fizician, astronom şi matematician englez. În celebra sa carte „Principiile matematice ale filozofiei naturale“ (1687) a fundamentat şi dezvoltat mecanica clasică, formulînd cele trei principii ale mecanicii, precum şi legea atracţiei universale. El a pus bazele mecanicii corpurilor cereşti, explicînd mişcările planetelor în sistemul solar. Pentru rezolvarea problemelor mecanicii a elaborat mijloace şi metode matematice noi şi de o mare însemnătate, punînd bazele calculului diferenţial şi integral (în acelaşi timp şi independent de Gottfried Wilhelm Leibniz).

Newton este cunoscut şi pentru cercetările sale în domeniul opticii. El a descoperit şi a studiat dispersia luminii (descompunerea luminii albe solare în culori). El este autorul unei teorii cu privire la natura luminii care a jucat un rol important în istoria ştiinţei (teoria corpusculară).

A perfecţionat aparatele optice, a construit pentru prima dat fără aberaţii cromatice.

Lucrările şi concepţiile lui Newton au exercitat o puternică asupra întregii fizici; ele au dominat fizica aproape două secole lucrărilor lui Newton au influenţat imens întreaga istorie, nu nur turii în general.

Începînd cu primele decenii ale secolului XX,s-a stabilit că niană nu este valabilă în domeniul vitezelor foarte mari, compa în vid (c = 300 000 km/s), precum şi în domeniul atomic.

De asemenea, constatăm uşor că aplicînd unui co *rectilinie*, o forţă *în direcţia mişcării sale* (a vitezei), nu *rectiliniu* al mişcării, adică nu abatem corpul de la traiec curbăm traiectoria, ci doar îl accelerăm sau frînăm pe ac torie). Deci *variaţia vitezei (acceleraţia) este în acelaşi sen*

Dacă însă aplicăm o forţă oblic sau perpendicular (faţă de viteză), atunci abatem corpul de la mişcarea rect toria, modificăm *direcţia* vectorului viteză. Astfel se î dacă lovim lateral o bilă de biliard aflată în mişcare sau bile de oţel care se rostogoleşte pe un plan orizontal de un magnet (fig. 2.2).

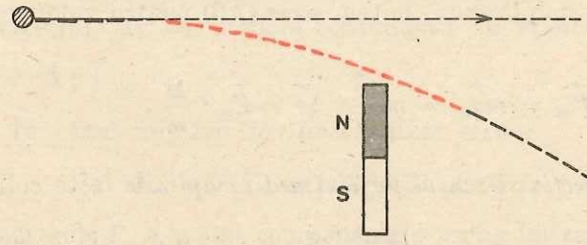


Fig. 2.2. Forţa de atracţie a magnetului curbează unei bile de oţel care se rostogoleşte pe un plan ori

Chiar din aceste experienţe şi observaţii simple se poate bănui că *acceleraţia imprimată are direcţia şi sensul forţei aplicate, fiind proporţională cu forţa şi invers proporţională cu masa corpului:* $\vec{a} = \text{const.}\ \frac{\vec{F}}{m}$.

Nenumărate experienţe, efectuate cu tot felul de corpuri, aflate în cele mai variate stări de mişcare, cărora li s-au aplicat diferite forţe (gravitaţionale, electrice, elastice etc.), au condus la următorul principiu:

vectorul forţă este proporţional cu produsul dintre masă şi vectorul acceleraţie

$$\vec{F} = \text{const.}\ m\vec{a}.$$

Acesta este conţinutul principiului II al dinamicii, numit şi *principiul fundamental* (lex secunda). Acest principiu a fost formulat de I. NEWTON (împreună cu celelalte principii ale mecanicii) în cartea sa „Principiile matematice ale filozofiei naturale" (1687).

Deoarece unitatea de măsură pentru masă (1 kg) este fixată, fiind chiar unitate fundamentală în SI (Sistem Internaţional de unităţi), iar unitatea de acceleraţie a fost deja stabilită ca unitate derivată (1 m/s²), vom alege unitatea de forţă astfel încît constanta de proporţionalitate din legea de mai sus să fie 1. Atunci ecuaţia principiului II devine:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \tag{2.5}$$

iar unitatea de măsură pentru forţă va fi egală cu unitatea de masă ori unitatea de acceleraţie:

$$[F] = [m] \cdot [a] = 1\ \text{kg} \cdot 1\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 1\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 1\ \text{N}. \tag{2.6}$$

Această unitate în SI se numeşte newton (N).

Newtonul este egal cu mărimea acelei forţe care aplicată unui corp cu masa de 1 kg îi imprimă o acceleraţie de 1 m/s².

Înţelegînd prin forţă medie pe un interval de timp Δt, o forţă constantă care produce aceeaşi acceleraţie medie sau aceeaşi variaţie de viteză pe intervalul Δt ca şi forţa variabilă dată, putem scrie (2.6) pentru valori medii:

$$\vec{F}_m = m\vec{a}_m = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t};\ \Delta\vec{v} = \vec{F}_m \cdot \frac{\Delta t}{m}, \tag{2.7}$$

variaţia vitezei are direcţia şi sensul forţei (medii) aplicate (este coliniară cu forţa).

Dacă forţa aplicată este coliniară cu viteza, variaţia de viteză va fi de asemenea coliniară cu viteza, deci viteza îşi păstrează direcţia, adică

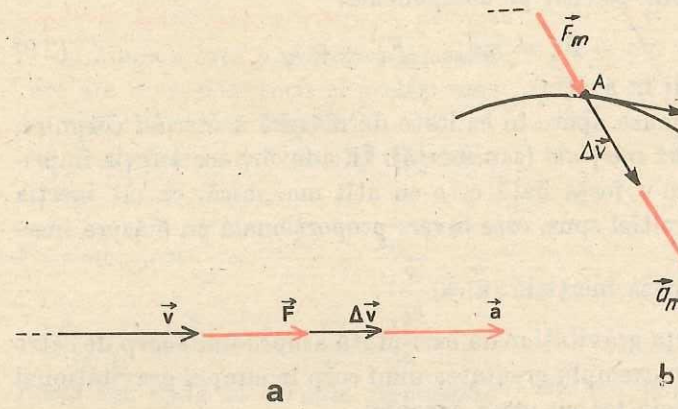


Fig. 2.3. Variaţia vectorului viteză are direcţia şi sensul forţ paralelă cu viteza, creşterea de viteză şi acceleraţia sînt pe este rectilinie. (*b*) Forţa fiind oblică pe viteză, variaţia de vite şi sensul forţei aplicate, deci mişcarea va fi

Dacă însă forţa aplicată este oblică faţă de vitez în direcţia şi în sensul forţei, deci traiectoria se va cu care este îndreptată forţa (fig. 2.3, *b*).

Experimente de verificare a legii fundamentale mai simple, vor fi prezentate la paragrafele următoa direcţia mişcării — mişcare rectilinie uniform varia stantă în modul, perpendiculară pe direcţia mişcăr uniformă, § 3.5.

2.3.1. **Observaţii în legătură cu principiul II. 1.** este o ecuaţie *vectorială*. Variaţia unui vector de exem fundată cu variaţia modulului Δv (unde $v = |\vec{v}|$ mişcare *curbilinie* uniformă avem $|\vec{v}| = v = \text{const}$, d *direcţia* vectorului viteză, deci $\Delta\vec{v} \neq 0$ şi $\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \neq$ ţia modulului, Δv, nu trebuie confundată cu modu $|\Delta\vec{v}| \neq \Delta|\vec{v}|$.

2. În cazul mişcării *rectilinii* putem scrie:

$$F_m = ma_m = m\Delta v / \Delta t,\ F = m \cdot$$

unde mărimile F, v, a sînt componentele vectorilor re Ox, pozitive dacă vectorii respectivi sînt orientaţi în axă şi negative dacă vectorii respectivi sînt orienta

În cazul mișcării *plane* ecuația vectorială $\vec{F} = m\vec{a}$ se proiectează pe cele două axe și se obțin două ecuații pe componente.

$$\vec{F} = m\vec{a} \rightarrow F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y \tag{2.9}$$

(analog în cazul mișcării în spațiu).

3. În ecuația (2.5) masa apare în calitate de măsură a *inerției* corpului, de aceea se numește *masă inerțială* (sau inertă). În adevăr, accelerația imprimată unui corp de către o forță dată este cu atît mai mică, cu cît inerția corpului este mai mare, altfel spus, este invers proporțională cu măsura inerției corpului, adică cu masa inerțială: $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$.

Pe de altă parte, forța gravitațională exercitată asupra unui corp de către un cîmp gravitațional, de exemplu greutatea unui corp în cîmpul gravitațional terestru, este proporțională tot cu masa corpului:

$$\vec{G} = m\vec{g}. \tag{2.10}$$

Se va arăta mai tîrziu că cele două mase coincid (§ 3.8.1).

Accelerația gravitațională $\vec{g}$ este orientată spre centrul Pămîntului, la fel ca și greutatea corpurilor și are valoarea $g \approx 9{,}8$ m/s² (depinde de altitudine și latitudine).

Greutatea etalonului masă de 1 kg în cîmpul gravitațional normal (standard) dat de accelerația gravitațională $g_n = 9{,}80665$ m/s² este:

$$G = mg = 1 \text{ kg} \cdot 9{,}80665 \text{ m/s}^2 = 9{,}80665 \text{ N} \approx 9{,}8 \text{ N}.$$

Accelerația gravitațională la nivelul mării și la paralela de 45° este $g_0 = 9{,}80616$ m/s².

4. Ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$ nu ne spune nimic despre *natura* forței: ea poate fi de natură gravitațională, electrică sau în particular forță elastică, forță de frecare etc. În ecuația $\vec{F} = m\vec{a}$ forța apare sub formă abstractă ca un model *mecanic* al oricărei interacțiuni a corpurilor, independent de natura fizică a acestei interacțiuni. În modul acesta, relația $\vec{F} = m\vec{a}$, pe lîngă caracterul de lege a naturii, poartă și caracterul de *definiție dinamică a forței*. De aceea pentru determinarea mișcării unui sistem: oscilator elastic, sistem solar, atom etc. trebuie cunoscută și *legea forței*, de exemplu legea lui Hooke, legea atracției gravitaționale (NEWTON), legea interacțiunii electrice (COULOMB) etc.

2.3.2. **Impulsul.** Să scriem desfășurat relația (2.7):

$$\vec{F}_m = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{(m\vec{v})_2 - (m\vec{v})_1}{t_2 - t_1}. \tag{2.11}$$

Se vede că aici apare produsul $m\vec{v}$ dintre masă și viteză. Acest produs reprezintă o nouă mărime fizică importantă numită impuls.

Impulsul punctului material este produsul dintre masa și viteza sa, $\vec{p} = m\vec{v}$.

Impulsul este o mărime *vectorială* care are aceeași direcție și același sens cu vectorul viteză (fig. 2.4).

Revenind la ecuația (2.11), putem scrie:

$$\vec{F}_m = m\vec{a}_m = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{2.12}$$

Forța este egală cu variația impulsului raportată la intervalul de timp, adică variația impulsului care *revine* unității de timp.

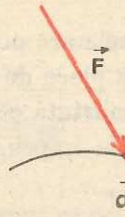


Fig. 2.4. Imp
$\vec{p} = m\vec{v}$, are
Variația impu

Aceasta este o altă formulare (cea mai generală) namicii (de altfel așa l-a formulat chiar Newton).

Unitatea de măsură pentru impuls rezultă din

$$[p] = [m][v] = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s} = 1 \text{ N}$$

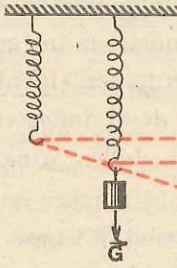
Această unitate este deci egală cu impulsul unui masa de 1 kg și se mișcă cu viteza de 1 m/s.

EXPERIMENT

Forțele produc două feluri de efecte: efecte d (numite efecte statice) și efecte de *accelerare* a c dinamice).

a) Efectele de deformare sînt folosite pentru a măsura forțele. Există corpuri, numite *elastice*, la care deformațiile (nu prea mari) dispar odată cu îndepărtarea forțelor care le-au produs, de exemplu tot felul de *resorturi*.

Dinamometrele sînt resorturi elastice prevăzute cu o riglă pentru măsurarea alungirilor, deci a forțelor aplicate, rigla fiind gradată direct în unități de forță (fig. 2.5). Cu ajutorul dinamometrelor putem verifica legea de compunere *vectorială* a forțelor.



a

Fig. 2.5. (*a*) A
este proporțion
(*b*) Schen

b) Efectele de accelerare pot fi puse în evidenţă cu montajul din figura 1.29. Detaşînd inelul cu placa de prindere (*22*, *32*) şi folosind diferite greutăţi crestate (*25*, *26*) vom constata că, cu cît forţa de greutate a acestora este mai mare, cu atît acceleraţia imprimată căruciorului este mai mare.

2.4. PRINCIPIUL ACŢIUNILOR RECIPROCE (lex tertia)

Prin ciocnirea a două bile, *fiecare* îşi schimbă viteza, fiindcă în timpul contactului bilele se deformează *reciproc* şi se nasc forţe elastice cu care o bilă acţionează asupra celeilalte. La fel, la ciocnirea a două vagoane, resorturile tampoanelor de la *fiecare* vagon se comprimă, *fiecare* vagon acţionînd asupra celuilalt cu o forţă.

În procesul interacţiunii a două corpuri, *fiecare* corp exercită o forţă asupra celuilalt, adică apar totdeauna *simultan două forţe*, numite *acţiune* şi *reacţiune*. Care din aceste două forţe se numeşte acţiune şi care reacţiune, depinde de care corp se consideră primul şi care al doilea. Primul corp acţionează asupra celui de-al doilea cu o forţă care se va numi acţiune, iar corpul al doilea acţionează (vom spune acum, reacţionează) asupra primului cu o forţă numită reacţiune. Cele două forţe acţionează *simultan* (în concepţia clasică newtoniană a acţiunii instantanee la distanţă).

Oriunde constatăm o forţă acţionînd asupra unui corp, eă este expresia acţiunii unui alt corp din mediul înconjurător, este o latură a *interacţiunii* dintre cele două corpuri. O forţă unică, izolată, este o imposibilitate.

EXPERIMENTE

1. Să luăm două dinamometre, să le cuplăm prin cîrligele lor şi apucîndu-le de inele să le întindem ca în figura 2.6. Oricît le-am întinde, indicaţiile dinamometrelor sînt permanent identice, forţa cu care primul dinamometru acţionează asupra celui de-al doilea este egală ca mărime şi opusă ca sens cu forţa cu care cel de-al doilea dinamometru acţionează asupra primului.

2. Punem pe două cărucioare un magnet şi o bucată de fier şi prindem cărucioarele prin intermediul unor dinamometre de obiecte fixe, ca în figura 2.7. Oricare ar fi distanţa dintre magnet şi bucata de fier, forţele de interacţiune arătate de dinamometre sînt egale în modul şi de sensuri opuse.

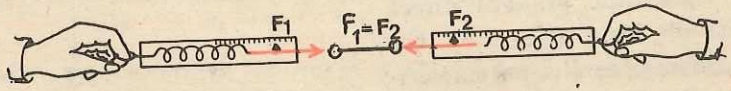


Fig. 2.6. Fiecare dinamometru acţionează asupra celuilalt cu o forţă egală în modul şi de sens opus.

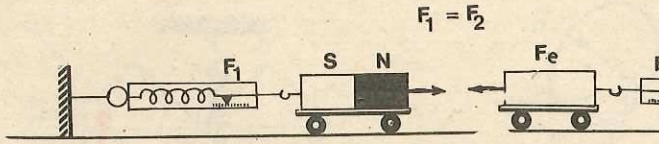


Fig. 2.7. Interacţiunea dintre un magnet şi o bucată de fier: cu forţe egale în modul şi de sensuri opuse.

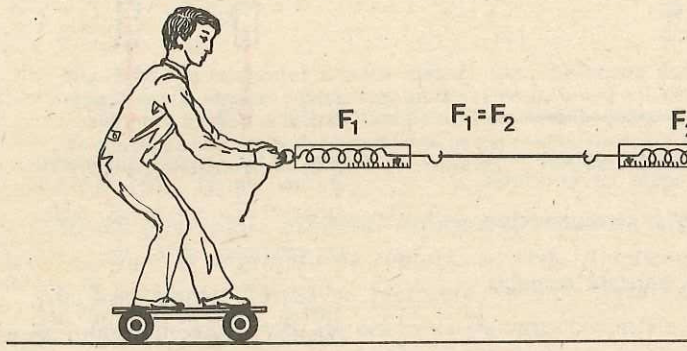


Fig. 2.8. Oricare din elevi ar trage de sfoară, ambele cărucioare mereu în acelaşi loc.

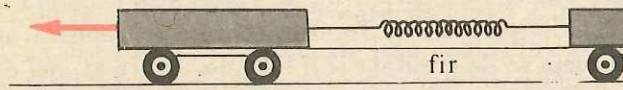


Fig. 2.9. Două cărucioare identice, aşezate pe un plan printr-un resort comprimat sînt supuse reciproc unor f şi de sensuri opuse.

3. Pe două cărucioare stau doi elevi şi trag de o sfoa care dintre ei trage activ „scurtînd" sfoara, ambele că de fiecare dată în acelaşi loc. Fiecare elev acţionează intermediul sforii, cu o forţă egală în modul şi de sens constata cu ajutorul unor dinamometre intercalate

4. Într-o altă variantă a experienţei două cărucioa pe o sticlă orizontală şi cuplate printr-un resort comp Dacă ardem firul, cele două cărucioare se vor depărta la forţe egale în modul şi de sensuri opuse (fig. 2.9).

5. Dacă punem un corp pe o platformă orizontală resort, corpul apasă pe *platformă* cu o forţă $\vec{F}$ egală comprimă resortul. Apare atunci o forţă elastică de r resortului, aplicată *corpului*, egală în modul şi de se astfel încît corpul va fi în repaus (fig. 2.10).

Acelaşi lucru se întîmplă cu orice corp aşezat pe tală, numai că la materialele dure deformarea nu se o

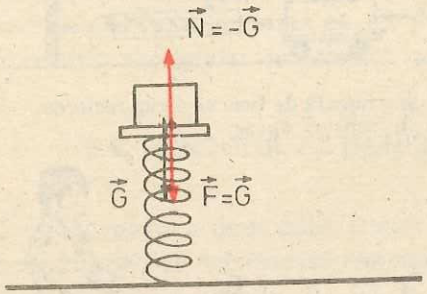


Fig. 2.10. Corpul aşezat pe un resort îl comprimă cu o forţă egală cu greutatea sa $\vec{G}$. Se naşte automat o reacţiune elastică $\vec{N}$ din partea resortului, egală în modul şi de sens opus, aplicată corpului.

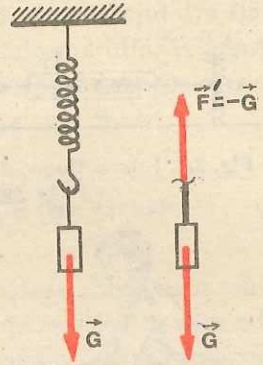


Fig. 2.11. Corpul suspendat de un resort (fir) întinde resortul cu o forţă egală cu greutatea sa $\vec{G}$. Se naşte atunci o forţă elastică $\vec{F'}$ din partea resortului, aplicată corpului, egală în modul şi de sens opus tracţiunii (greutăţii) $\vec{G}$.

6. În altă variantă, suspendăm corpul de un resort (de exemplu de un dinamometru) (fig. 2.11). În punctul de legătură corpul acţionează asupra *resortului* sau *firului* cu forţa sa de greutate şi îl întinde. Apare atunci o forţă elastică din partea resortului sau a firului, aplicată corpului, egală în modul şi de sens opus cu greutatea corpului (acesta fiind în repaus, în echilibru).

Nenumărate experienţe şi măsurători dovedesc valabilitatea *principiului acţiunilor reciproce* sau *principiului acţiunii şi reacţiunii:*

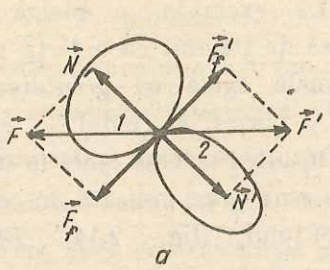
fiecărei acţiuni i se opune totdeauna o reacţiune egală în modul şi de sens opus, sau altfel, *acţiunile reciproce a două corpuri sînt totdeauna egale ca mărime şi dirijate în sensuri opuse.*

Cele două forţe, acţiunea şi reacţiunea, sînt aplicate unor corpuri *diferite* şi acţionează pe *aceeaşi linie*, linia care uneşte cele două corpuri. Dacă cele două forţe ar acţiona asupra aceluiaşi corp, acesta n-ar putea fi niciodată accelerat, deoarece cele două forţe ar da totdeauna rezultantă nulă.

Principiul acţiunii şi reacţiunii poate fi exprimat şi astfel:

dacă un corp acţionează asupra altui corp cu o forţă, numită acţiune, cel de-al doilea corp acţionează asupra primului cu o forţă egală în modul şi opusă ca sens, numită reacţiune.

2.4.1. **Exemple şi aplicaţii ale principiului III. 1.** La *contactul* oricăror două corpuri apar totdeauna *două* forţe, egale în modul şi de sensuri opuse, acţiunea unui corp asupra celuilalt şi reacţiunea celui de-al doilea asupra primului (fig. 2.12).



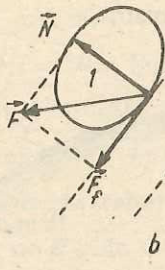


Fig. 2.12. La contactul a două corpuri apar totdeauna dou
modul şi de sensuri opuse, acţiunea şi reacţiunea, cu ca
nează unul asupra celuilalt. Componentele normale (perpen
de contact se datoresc deformării reciproce a corpurilor, iar c
frecare), conţinute în planul de contact, se datoresc frecă

Aceste forţe sînt *rezultatul deformării reciproce a c*
dintre corpuri la suprafaţa de contact.

Anume, prin deformarea reciprocă se nasc *forţe (e*
pendiculare) pe suprafaţa de contact. Desigur corpurile
deşi forţele normale sînt *egale în modul.* Prin frecare,
forţe tangenţiale, de frecare, conţinute în planul de conta
$\vec{F}'_f = -\vec{F}_f$. (Uneori forţele de frecare sînt mici şi pot f

2. În orice *secţiune* a unui fir (sau cablu) întins de
de greutatea unui corp atîrnat) sau în orice *secţiune* a
comprimate, acţionează *două* forţe egale în modul şi de s
şi reacţiunea, cu care o parte a firului (barei) acţion
părţi (fig. 2.13). Oricare din aceste două forţe se num
din fir (sau bară). Tensiunea în orice punct al firului
un dinamometru inserat pe fir în punctul respectiv. D
a firului este neglijabilă, tensiunea din fir în orice secţi
(egală cu greutatea corpului atîrnat, de exemplu).

3. Principiul acţiunii şi reacţiunii se aplică nu numa
nemijlocit între două corpuri, ci şi în cazul cînd corpuril
cîmpul gravitaţional sau electrostatic.

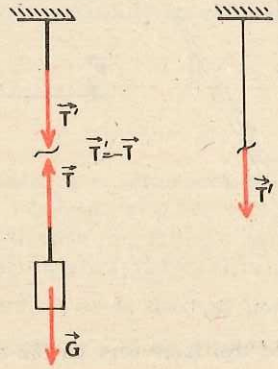


Fig. 2.13. Tensiunea (elastică) dintr-un fir întins poate fi măsurată cu un dinamometru inserat în fir în secţiunea dorită.

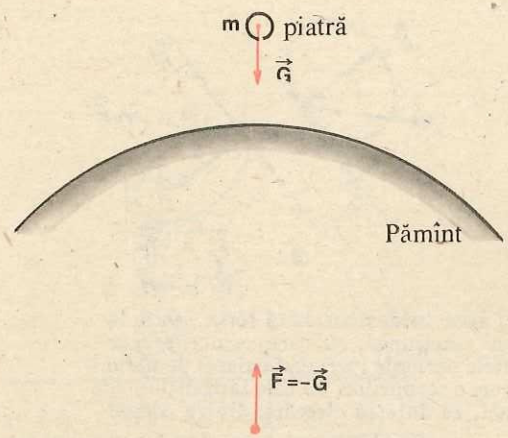


Fig. 2.14. Piatra este atrasă de Pămînt cu o forță exact egală în modul și de sens opus cu forța cu care Pămîntul este atras de piatră. Efectele acestor forțe sînt însă cu totul diferite din cauza maselor total diferite.

De exemplu, o piatră este atrasă de Pămînt cu o forță gravitațională egală cu greutatea sa. Dar și piatra, la rîndul ei, atrage Pămîntul cu o forță *egală* în modul și de sens *opus*, aplicată în centrul Pămîntului (fig. 2.14). *Efectele* acestor forțe, *egale* în modul, sînt însă cu totul diferite, din cauza deosebirii colosale în privința masei celor două corpuri.

La fel, forțele de atracție gravitațională reciprocă între Lună și Pămînt, între oricare satelit și Pămînt, între Pămînt și Soare etc. sînt egale în modul și opuse ca sens.

În cazul interacțiunii electrostatice, de asemenea, forța de atracție sau de respingere, exercitată de un purtător de sarcină asupra altuia, este totdeauna egală în modul și opusă ca sens forței exercitate de cel de-al doilea purtător de sarcină asupra primului. Cele două forțe acționează pe *aceeași* dreaptă, dreapta care unește cei doi purtători.

2.5. PRINCIPIUL SUPRAPUNERII FORȚELOR

Fie un punct material asupra căruia acționează trei forțe care își fac echilibru: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$ (fig. 2.15). Aceasta înseamnă că suma a două forțe, de exemplu, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ este egală în modul și de sens opus cu cea de-a treia forță: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3$.

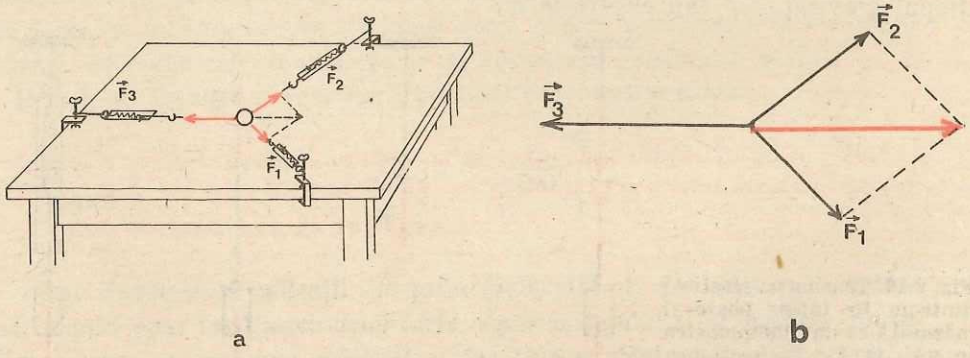


Fig. 2.15. Punct material supus la trei forțe care își fac echilibru: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.

Forța $\vec{F}_1$, *aplicată singură* punctului material, i-a accelerație $\vec{a}_1$, conform legii fundamentale $\vec{F}_1 = m\vec{a}_1$. Fo ar da o anumită accelerație $\vec{a}_2$, $\vec{F}_2 = m\vec{a}_2$ și la fel forța F accelerația $\vec{a}_3$. Accelerațiile sînt proporționale cu for $\vec{F}_2$ acționează *simultan*, accelerația produsă de ele trebui și de sens opus cu accelerația $\vec{a}_3$ produsă de $\vec{F}_3$, de v în repaus. Prin urmare, accelerația rezultantă se c paralelogramului, din accelerațiile pe care le-ar produc componentă dacă ar acționa singură. De asemenea, de o forță nu depinde de viteza momentană a corpului accelerația nu este riguros coliniară cu forța, și depinde

Astfel de considerații conduc la formularea *prin acțiunii forțelor* sau *principiului suprapunerii forțelo*

dacă mai multe forțe acționează în același timp as material, fiecare forță produce propria sa accelerație în de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiin a accelerațiilor individuale.

1. NEWTON a formulat acest principiu separat de sub forma următoare:

un corp, sub acțiunea simultană a două forțe, d paralelogram avînd ca laturi aceste forțe, în același timp în fiecare latură sub acțiunea forței corespunzătoare.

Acest principiu arată deci că forțele și accelerații mărimi *vectoriale* care se compun după regula paralelog să rezolvăm probleme cînd asupra corpului acționeaz forțe.

În adevăr, cazul unei *singure* forțe se prezintă rar, interacțiunea corpului cu mediul exterior este dată *în p* nea sa cu un *singur* corp, interacțiunile cu celelalte corp

EXEMPLU

Dacă aruncăm o piatră, asupra ei acționează, pe de o p datorită interacțiunii cu Pămîntul, și pe de altă parte f de frecare cu aerul, care se opun mișcării, dar care într-o neglijate. Care este atunci accelerația pietrei în mișcarea

Conform legii fundamentale, n-avem decît să împărțim și obținem vectorul accelerației $\vec{g} = \vec{G}/m$, orientat vertical

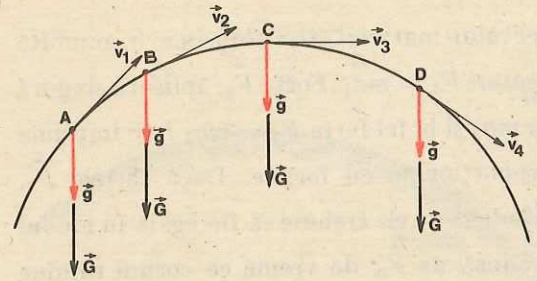


Fig. 2.16. În mișcarea liberă în vid a unui corp accelerația sa $\vec{g}$ este tot timpul aceeași, orientată vertical în jos ca și forța de greutate $\vec{G}$.

În practică, asupra corpului acționează aproape totdeauna simultan mai multe forțe, printre care este forța de greutate, deoarece nici un corp de pe Pămînt nu poate fi sustras interacțiunii sale gravitaționale cu Pămîntul. În afară de aceasta, corpul este în contact cu mediul, adică în contact cu alte corpuri (așezat pe un plan, sprijinit de un perete, mișcat într-un fluid). La contactul cu un solid apar, după cum am văzut, două forțe: reacțiunea normală și forța de frecare. În cazul mișcării într-un fluid (la contactul solid-fluid) apar de asemenea două forțe: forța arhimedică (verticală) și forța de rezistență (opusă vitezei). În sfîrșit, asupra corpului se pot exercita forțe de tracțiune sau de împingere prin fire sau tije.

După ce am ales corpul pe care vrem să-l studiem și l-am izolat mintal, reprezentăm *toate* forțele care acționează *asupra lui* și care sînt evident rezultatul interacțiunii sale cu mediul exterior.

În cazul unui corp aproximat printr-un *punct material*, toate forțele se aplică în acest punct, deci sînt forțe *concurente* și se compun după *regula paralelogramului sau a poligonului.*

În cazul mișcării de *translație* a unui corp forțele pot fi deplasate paralel și compuse ca la punctul material.

De altfel, în rezolvarea problemelor practice nu este de obicei necesar să compunem forțele, ci mai degrabă să le *descompunem.*

În cazul particular cînd toate forțele acționează *pe direcția mișcării*, alegem dreapta respectivă drept axă Ox (cu sensul pozitiv ales în sensul vitezei) și considerăm forțele pozitive dacă acționează în sensul pozitiv ales și negative dacă acționează în sensul negativ. Suma algebrică a acestor forțe ne dă forța rezultantă, pozitivă dacă acționează în sensul pozitiv și negativă în caz contrar:

$$\Sigma F = ma.$$

(Litera sigma majusculă, Σ, înseamnă *sumă.*)

Cînd toate forțele acționează *în planul mișcării*, alegem în acel plan două direcții convenabile (de obicei perpendiculare între ele) și descompunem toate forțele, viteza și accelerația, după cele două direcții alese. De cele mai multe ori alegem axele *perpendiculare* între ele, Ox, Oy, atunci paralelogramul vectorilor devine un *dreptunghi* și componentele vectorilor se obțin prin *proiecție ortogonală.* Mișcarea plană se descompune în două mișcări rectilinii după cele

două axe și deci pentru fiecare axă separat scriem f
cării rectilinii.

Prin urmare, ecuația fundamentală $\vec{R} = \Sigma\vec{F}$ =
punct material dat se aplică totdeauna *proiectînd-o*
ortogonale între ele (două axe în cazul mișcării pla
mișcării în spațiu), adică *pe componente.*

**Suma componentelor pe o axă Ox a tuturor forț
(punct material sau corp în mișcare de translați
corpului înmulțită cu componenta accelerației pe**

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + \ldots = m \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots = m \\ (F_{1z} + F_{2z} + \ldots = m \end{cases}$$

2.6. PRINCIPIUL RELATIVITĂȚII ÎN MECANIC

Încă pentru Galilei era clar că prin experiențe mecanice,
sistem (laborator), este imposibil de determinat mișcarea rec
față de stele sau față de Soare sau chiar față de Pămînt. Iată ce
fenomenele mecanice dintr-o cabină închisă a unei corăbii:

„Dacă mișcarea corăbiei este rectilinie uniformă, nu veț
schimbare în toate fenomenele și nu veți putea hotărî, ținî
aceste fenomene, dacă corabia se mișcă sau stă pe loc. Săriț
aceleași distanțe ca și atunci cînd corabia se află în repaus, adi
a corăbiei, nu veți face sărituri mai mari spre pupă, decît spre pr
cît vă aflați în aer, podeaua de sub voi fuge în partea opusă săriț
oarecare unui prieten, nu va trebui să-l aruncați cu o forță
se va afla lîngă prora corăbiei, iar dumneavoastră lîn
ocupa poziții inverse; picăturile dintr-o cană cu apă ați
vertical pe podea și nici una din ele nu va cădea în di
cît picătura se află în aer, corabia înaintează. Mușteleîși vor
în ce direcție, și niciodată nu se va întîmpla ca ele să se strîn
piată de pupă, ca și cum ar obosi să se tot țină după mersul ra

Acesta este de fapt conținutul principiului relativității

Principiul relativității al lui Galilei se poate formula astf
nică efectuată în *interiorul* unui sistem de referință inerția
mînăm mișcarea sa rectilinie uniformă față de alte sisteme
de stele și nebuloase). Altfel spus:

legile mecanicii sînt aceleași în toate sistemele de referință

De aici rezultă că din punct de vedere mecanic toate sist
deci cele care se mișcă rectiliniu uniform unele față de altele
echivalente, nici un sistem de referință inerțial nu poate fi
toate sînt egal justificate.

În adevăr, primul principiu al mecanicii (principiul iner
sistem de referință inerțial, deoarece este chiar folosit pentr
Deoarece măsurarea *forței* poate fi redusă la măsurarea unor lu
simultană a capetelor alungirii unui resort), iar lungimile și

în mecanica clasică newtoniană, rezultă că și forța este aceeași în diferite sisteme de referință inerțiale (este vorba de forțe dependente numai de distanțe și viteze relative), deci și principiul III al acțiunii și reacțiunii este valabil în aceste sisteme. În sfîrșit, am arătat cu ajutorul transformărilor lui Galilei că și *accelerația are caracter invariant* față de sistemele de referință inerțiale, de aceea și principiul fundamental (II) este valabil în orice sistem de referință inerțial (masa este o constantă în mecanica clasică). Prin urmare:

principiile mecanicii newtoniene fiind invariante la transformările Galilei, rezultă că toate legile mecanicii newtoniene (care sînt consecințe ale principiilor) *sînt invariante la transformările lui Galilei adică sînt aceleași în toate sistemele de referință inerțiale.*

După cum am spus, un fizician închis într-un laborator nu poate determina cu ajutorul experiențelor mecanice locale mișcarea rectilinie uniformă a laboratorului său față de sistemele de referință inerțiale, dar poate determina o mișcare curbilinie accelerată a laboratorului. Astfel, prin experiențe mecanice efectuate chiar pe Pămînt se poate dovedi mișcarea de rotație diurnă a Pămîntului: amintim, de exemplu, celebra experiență a lui Foucault din 1851 cu rotația planului de oscilație al unui pendul.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un cărucior cu ciment, cu masa $m = 100$ kg, este ridicat cu ajutorul unei macarale cu o forță $F = 1{,}20$ kN. Care este accelerația căruciorului?

Rezolvare. Asupra căruciorului acționează *două* forțe: greutatea $\vec{G} = m\vec{g}$, în jos, și forța de tracțiune $\vec{F}$ exercitată de macara prin cablu, în sus (neglijăm forța arhimedică și forțele de frecare) (fig. 2.17). Alegînd axa Ox vertical în sus, în sensul mișcării, avem

$$F - mg = ma,\ a = \frac{F - mg}{m} = 2{,}2\ \text{m/s}^2.$$

Observație. Forța F poate fi exercitată prin intermediul unui fir trecut peste scripete. Vom presupune totdeauna în problemele de mai jos că firul este de masă neglijabilă, subțire, flexibil și inextensibil. De asemenea, vom presupune totdeauna că scripetele este *ideal*, adică de masă neglijabilă și cu frecări neglijabile în lagărele sale (cu rulmenți).

Un scripete ideal schimbă convenabil direcția forței: de o parte și de alta a scripetelui forța de întindere a *firului* va fi aceeași. Se poate verifica aceasta cu ajutorul unor dinamometre prinse de cele două capete ale firului (fig. 2.18).

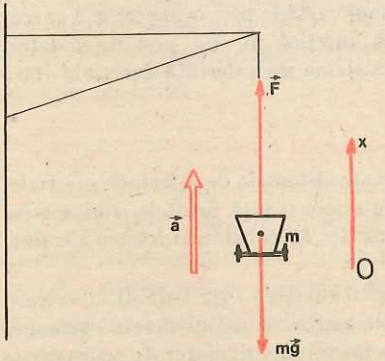


Fig. 2.17. La problema rezolvată 1.

Prin *tensiunea din fir* se înțelege forța care întinde firul și care se poate măsura tăind firul și intercalînd un dinamometru (fig. 2.19). Tensiunea din fir este o forță elastică care se datorește deformării (alungirii) elastice a firului. Astfel de tensiuni în cabluri sau bare din cadrul diferitelor construcții (poduri, acoperișuri etc.) trebuie neapărat cunoscute pentru a alege cablul sau bara de grosime corespunzătoare ca să nu se rupă.

2. Peste un scripete ideal este trecut un fir de capetele căruia sînt atîrnate două corpuri de

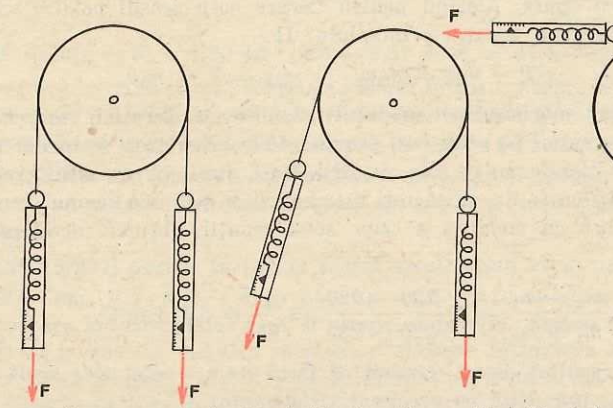


Fig. 2.18. Un scripete ideal (de inerție neglijabilă și fr în lagăre) schimbă convenabil direcția forței: de o par a scripetelui forța de întindere a firului (tensiunea aceeași.

mase $m_1 = 220$ g și $m_2 = 230$ g. Să se calculeze accelerația sist fir (fig. 2.20).

Rezolvare. Un scripete ideal schimbă convenabil *direcția* forței, d a scripetelui *tensiunea din fir este aceeași.*

Asupra fiecărui corp acționează forța de tensiune din fir T în în jos. Diferența acestor două forțe produce accelerația corpu fiind legate prin fir, se mișcă solidar, m_2 în jos, m_1 în sus,

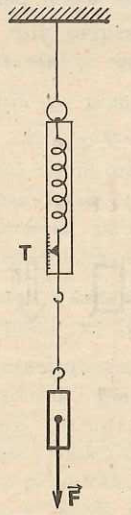
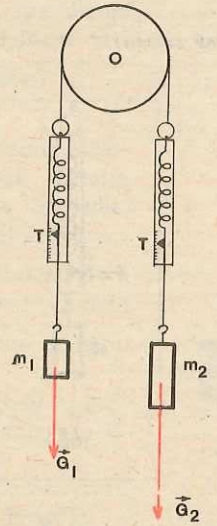


Fig. 2.19. Tensiunea dintr-un fir este forța care întinde firul și se poate măsura cu un dinamometru inserat pe fir.



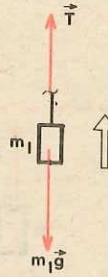


Fig. 2.20. Un scripete peste care este corpuri atîrnate la capete (la exe

modul dar de sensuri opuse. Alegînd pentru fiecare corp sensul pozitiv al axei în sensul mișcării *sale*, scriem ecuația principiului II:

$$T - m_1 g = m_1 a, \qquad m_2 g - T = m_2 a.$$

Aici T, a, g reprezintă mărimea sau modulul tensiunii, accelerației, respectiv accelerației gravitaționale, semnul (+) sau (−) provine de la orientarea vectorilor respectivi față de sensul *pozitiv ales de noi* pe axa mișcării. Dacă am inversa sensul axei, ecuația respectivă s-ar înmulți cu (−1), adică toți membrii și-ar schimba semnul.

Prin adunarea membru cu membru a celor două ecuații, obținem accelerația sistemului:

$$a = g\,\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} = g\,\frac{230 - 220}{220 + 230} = \frac{g}{45} = 0{,}218 \text{ m/s}^2.$$

Putem obține acest rezultat direct, scriind că forța $(m_2 g - m_1 g)$ este egală cu masa sistemului $(m_1 + m_2)$ înmulțită cu accelerația sistemului a.

Introducînd expresia accelerației a în prima sau a doua ecuație de mai sus, găsim tensiunea din fir:

$$T = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 2{,}20 \text{ N}.$$

3. Într-un lift este suspendat de tavan un dinamometru de care atîrnă un corp cu masa $m = 1{,}00$ kg. Ce forță indică dinamometrul dacă liftul se mișcă cu accelerația $a = 2{,}0$ m/s² îndreptată: *a)* în sus, *b)* în jos (fig. 2.21).

Rezolvare. Dacă liftul este în repaus, resortul dinamometrului este întins cu o forță egală cu greutatea corpului atîrnat, acesta fiind în repaus:

$$F = G = mg = 1{,}00 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 = 9{,}8 \text{ N}.$$

a) În primul caz, alegînd sensul pozitiv în sus, în sensul accelerației, avem pentru corpul suspendat:

$$F - mg = ma,$$

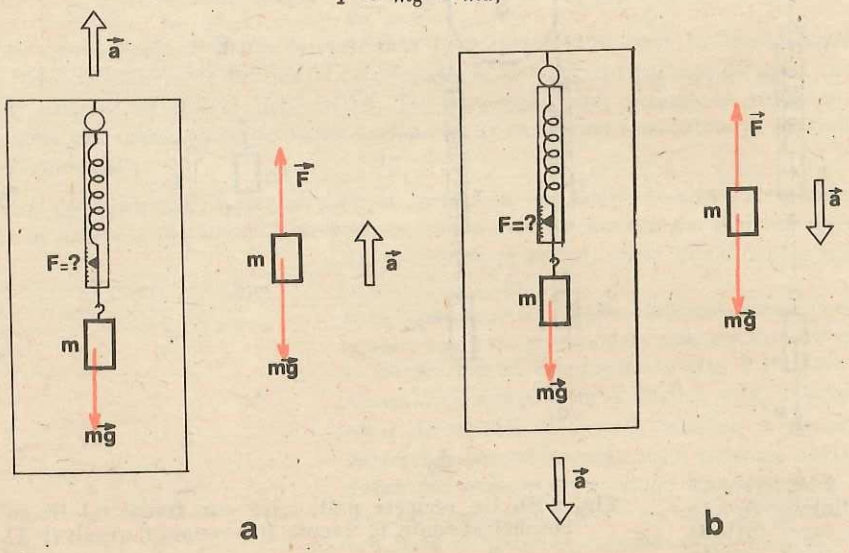


Fig. 2.21. Dinamometrul suspendat de tavanul unui lift accelerat și avînd un corp suspendat la capăt dă indicații diferite de greutatea corpului. (Problema rezolvată 3.).

de unde

$$F = m(g + a) = 1{,}00 \text{ kg} \cdot (9{,}8 + 2{,}0) \text{ m/s}^2 = 11{,}8 \text{ N}$$

Acest caz are loc cînd liftul pornește accelerat în sus. Atunci c puțin în urmă datorită inerției sale, resortul se întinde, se naș *mentară* necesară pentru a *accelera* corpul. Exact la fel se întîn și începe să frîneze (aceeași accelerație ca mai sus). Corpul în să-și mențină viteza, întinde resortul, se naște o forță ela îl *frînează*.

b) Alegînd sensul pozitiv în jos, în sensul accelerației, avem pe

$mg - F = ma$, $F = m(g - a) = 1{,}00$ kg $\cdot$ (9,8 − 2,0) m/s² =

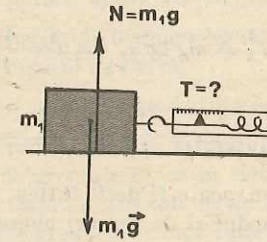
Acest caz are loc cînd liftul urcă și începe să frîneze. Atunci țină viteza în sus, în virtutea inerției, și slăbește întinderea liftul pornește accelerat în jos, corpul rămîne inițial în urmă scade. Dacă liftul cade liber în jos cu accelerația $a = g$, dinamo *zero* (starea de „imponderabilitate": oricare corp din cabina lift eași accelerație de cădere liberă, ca și liftul). Dacă liftul ar fi tr ție $a > g$, resortul ar fi comprimat.

Calculați ce forță de apăsare simte un om de masă $m = 70$ liftului în cazurile de mai sus.

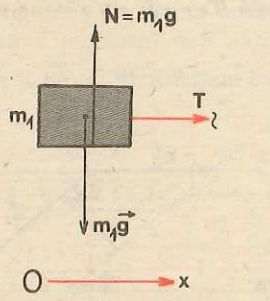
O b s e r v a ț i e. Un corp așezat pe un *plan orizontal* neted, fără frecări, exercită o forță de apăsare asupra planului, deformîndu-l. Apare atunci o forță de reacțiune $\vec{N}$ din partea planului, exercitată asupra corpului (principiul III). Forța $\vec{N}$ este perpendiculară pe planul orizontal și compensează forța verticală de greutate $\vec{G}$, adică $\vec{N} = -\vec{G}$ sau $\vec{N} + \vec{G} = 0$.

Dacă acum asupra corpului acționează forțe pe o aceeași direcție *orizontală*, putem aplica întocmai considerațiile de la cazul unidimensional, deoarece greutatea $\vec{G}$ a corpului va fi permanent anulată de reacțiunea normală $\vec{N}$ a planului orizontal.

Acest caz intervine frecvent în mișcarea vehiculelor pe drumuri rectilinii orizontale.



a



4. Pe o masă netedă, fără frecări, este așezat un corp de masă $m_1 = 5{,}0$ kg de care este prins un fir orizontal, trecut peste un scripete ideal și avînd la capăt un corp de masă $m_2 = 2{,}0$ kg (fig. 2.22). Să se calculeze accelerația sistemului și tensiunea din fir.

Fig. 2.22. Care este acc ce forță indică dina rezolva

Rezolvare. Forța de greutate $G_1 = m_1 g$ a corpului m_1 este anulată de reacțiunea normală N_1 a mesei orizontale. Forțele de frecare sînt neglijabile. Scripetele fiind ideal, tensiunea din fir este aceeași de o parte și de alta a scripetelui.

Alegem axa Ox pentru fiecare corp în direcția și sensul mișcării sale. Atunci ecuația fundamentală se scrie astfel:

$$T = m_1 a, \quad m_2 g - T = m_2 a,$$

de unde

$$a = g \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 2{,}8 \text{ m/s}^2; \quad T = m_1 a = 14 \text{ N}.$$

5. O lampă cu masa $m = 3{,}0$ kg este suspendată ca în figura 2.23. Să se afle tensiunea din fir (de lungime $l = 0{,}50$ m) și din bară (de lungime $b = 0{,}40$ m).

Rezolvare. Putem judeca în două moduri:

a) Descompunem greutatea lămpii $\vec{G}$ după direcția firului și a barei. Pentru aceasta ducem prin originea și prin vîrful vectorului $\vec{G} = m\vec{g}$ (desenat separat) paralele la cele două direcții. Componenta $\vec{G}_1$ întinde firul și este anihilată de tensiunea $\vec{T}_1$ din fir, iar componenta $\vec{G}_2$ comprimă bara și este anihilată de tensiunea $\vec{T}_2$ din bară. Prin urmare:

$$T_1 = mg/\cos\alpha, \quad T_2 = mg \operatorname{tg}\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{1}{l}\sqrt{l^2 - b^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = b\frac{1}{\sqrt{l^2 - b^2}}.$$

Deci

$$T_1 = mg\frac{l}{\sqrt{l^2 - b^2}} = 49 \text{ N}, \quad T_2 = mg\frac{b}{\sqrt{l^2 - b^2}} = 39{,}2 \text{ N}.$$

Observăm că un fir nu poate fi decît întins; în fiecare secțiune a firului acționează două forțe egale în modul și de sensuri opuse, acțiunea și reacțiunea, aplicate capetelor firului din secțiune, care întind respectiv cele două părți ale firului.

O bară poate fi întinsă, ca un fir, sau comprimată. În ultimul caz, în fiecare secțiune, cele două forțe comprimă respectiv cele două părți ale barei.

b) Nodul P în care se îmbină firul, bara și cablul de susținere al lămpii este în echilibru, deci cele trei forțe trebuie să dea rezultantă nulă: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{G} = 0$. Alegem două direcții convenabile, în cazul nostru cea orizontală și cea verticală (fig. 2.23, *c*) și scriem condiția de echilibru separat pentru fiecare direcție, proiectînd ecuația vectorială de mai sus pe cele două direcții:

$$\text{pe orizontală } T_2 - T_1 \sin\alpha = 0, \quad \text{pe verticală } T_1 \cos\alpha - mg = 0.$$

De unde

$$T_1 = mg/\cos\alpha, \quad T_2 = T_1 \sin\alpha = mg \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

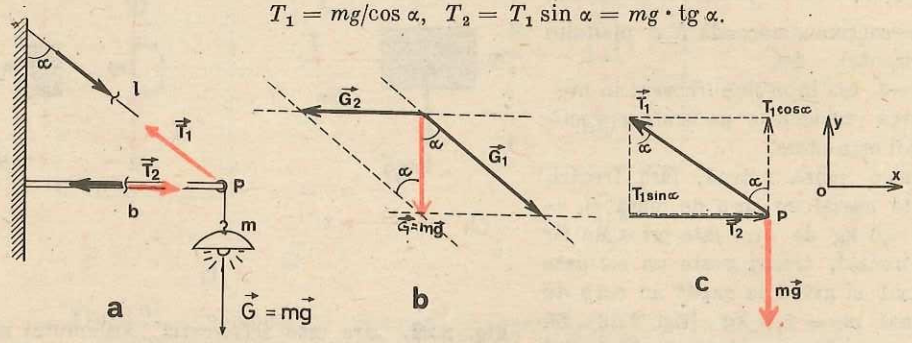


Fig. 2.23. Descompunerea forțelor în problema rezolvată 5.

1. Un muncitor sparge lemne cu toporul. La spargerea un în butuc. Cum trebuie să lovim de un suport rigid: cu h rului în jos, pentru a sparge butucul? *(Indicație:* a se toporului și butucului.)

R: cu butucul în sus, d

2. Pentru a îndepărta praful, hainele sau covoarele sînt aceste două procedee.

R: în virtutea inerției particulele de praf

3. De ce atunci cînd vrem să introducem mînerul de lemn î lovim cu capătul liber al mînerului de un obiect masiv

R: masa mîr

4. De ce este greu să batem un cui într-un gard prost fix să facem ca să putem totuși bate cuiul?

R: apăsăm de partea opusă cu un

5. Dacă stăm într-o barcă ușoară și tragem de o sfoară leg pia de vapor. De ce nu se apropie vaporul de barcă?

R: deși forțele sînt egale în modul, accelerațiile

6. Un dinamometru ușor este legat prin două fire orizont de două corpuri identice, fiecare de greutate G, ca în fi indica: 1) zero, fiindcă cele două forțe de greutate egal fiindcă fiecare din cele două forțe de greutate întinde res de greutate G a unui singur corp. Care răspuns este cor

7. O sfoară este întinsă orizontal de doi elevi. La mijlocul agățat un corp cu masa de 1 kg. Poate fi sfoara întinsă

8. În ce constă eroarea afirmației: „Nu pot mișca din loc (a la orice acțiune de-a mea, oricît de mare, exercitată asu automat cu o reacțiune egală în modul și opusă ca sens tății acțiunii și reacțiunii), care îmi anihilează deci aut

R: acțiunea și reacțiunea

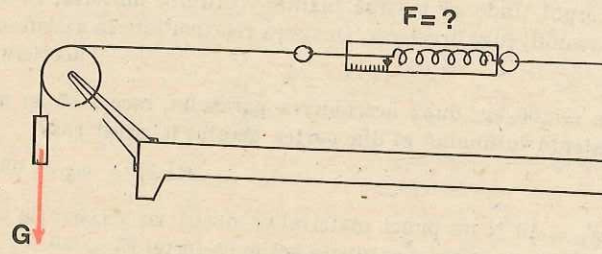


Fig. 2.24. Ce forță arată dinamomet

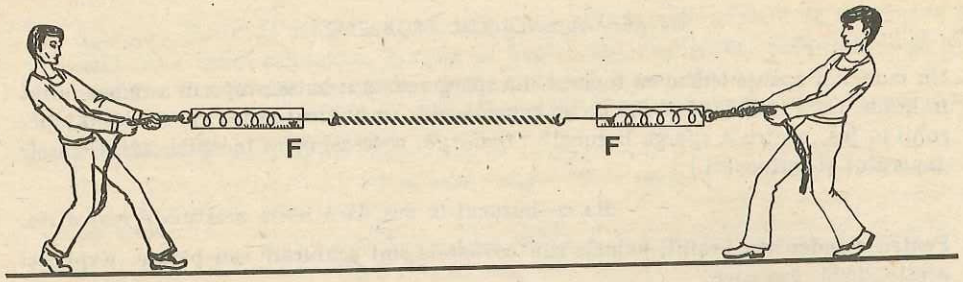


Fig. 2.25. Forţele cu care este trasă sfoara de către elevi sînt permanent egale în modul şi opuse ca sens. Totuşi elevul mai tare învinge şi îl trage pe cel mai slab spre el. De ce?

9. Doi elevi trag de un capăt şi de altul o sfoară, opintindu-se cu picioarele de pămînt (fig. 2.25). Cele două forţe, cu care fiecare acţionează asupra celuilalt prin intermediul sforii, sînt permanent egale în modul şi opuse ca sens, conform principiului egalităţii acţiunii şi reacţiunii (ceea ce se poate verifica punînd pe fiecare elev să tragă de sfoară prin intermediul unui dinamometru prins de un capăt). Totuşi elevul mai puternic va învinge, trăgînd pe cel slab de partea sa. Cum explicaţi aceasta?

R: intervin şi forţele de frecare cu solul.

10. Două vagoane au la tampoanele lor resorturi identice. Vagoanele se ciocnesc. Se consideră mai multe cazuri: unul din vagoane este în repaus; amîndouă se mişcă; unul este încărcat, celălalt gol etc. Să se compare între ele, comprimările celor două resorturi în aceste cazuri.

R: se comprimă egal.

11. Un vapor ciocneşte o barcă, pe care o rupe, fără ca el să aibă vreo stricăciune, sau un camion loveşte un cărucior şi îl strică fără a avea el însuşi vreo stricăciune etc. Nu contrazice aceasta principiul acţiunii şi reacţiunii?

R: nu; efectele forţelor depind de proprietăţile corpurilor.

12. Cum sînt deformate resorturile tampoanelor între diferite vagoane consecutive la un tren *tras* de locomotivă şi la un tren *împins* de locomotivă?

R: alungirile, respectiv comprimările scad de la locomotivă spre capătul liber.

13. *a)* Cum explicaţi răsturnarea corpurilor într-un vehicul care frînează brusc sau virează brusc?

b) Cum explicaţi devierea obiectelor suspendate într-un vagon care accelerează rectiliniu sau virează? În ce sens are loc devierea?

R: în virtutea inerţiei corpul tinde să meargă înainte rectiliniu uniform, în timp ce podeaua (tavanul) fuge accelerat. Devierea relativă este în sensul opus acceleraţiei.

14. Un paraşutist cu masa $m = 100$ kg, după deschiderea paraşutei, începe să se mişte uniform. Ce forţă de rezistenţă întîmpină el din partea aerului în acest caz?

R: $F_r = mg = 980$ N.

15. Sub acţiunea unei forţe $F_1 = 10$ N un punct material se mişcă cu acceleraţia $a_1 = 2{,}0$ m/s². Cu ce acceleraţie se va mişca acesta sub acţiunea forţei $F_2 = 50$ N?

R: $a_2 = a_1 \cdot F_2/F_1 = 10$ m/s².

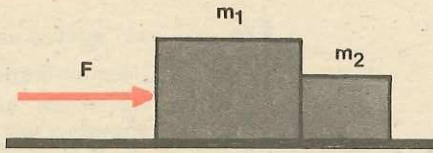


Fig. 2.26. Cu ce forţă împinge corpu
corpul m_2?

16. Un corp cu masa $m_1 = 5{,}0$ kg, sub acţiunea unei forţe,
$= 4{,}0$ m/s². Ce acceleraţie va căpăta un corp de masă
aceleiaşi forţe?

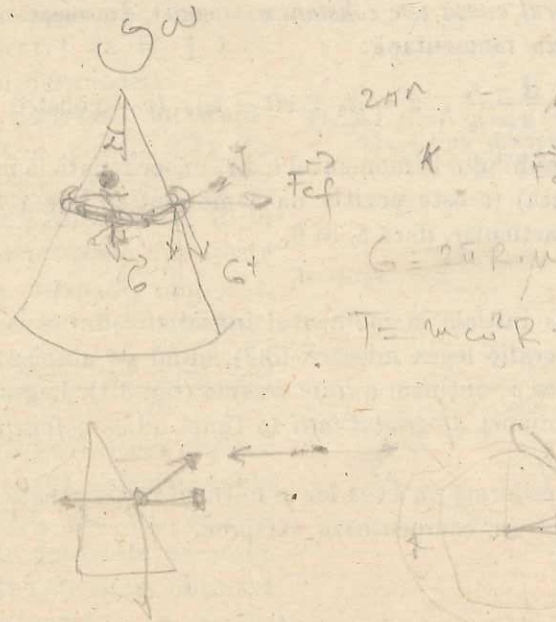
R:

17. O minge cu masa $m = 0{,}40$ kg după lovire a căpătat o vit
lovirii a fost $\Delta t = 4{,}0$ ms, să se afle forţa medie de cio

18. O sîrmă de oţel rezistă pînă la o forţă de întindere (d
ce acceleraţie maximă putem ridica, cu ajutorul acestei
masă $m = 100$ kg atîrnat la capătul sîrmei?

R: a_1

19. Două corpuri paralelipipedice de mase $m_1 = 20$ kg şi $m_2 =$
pe o masă orizontală netedă fără frecări. Corpul de mas
orizontală $F = 100$ N (fig. 2.26). Cu ce forţă corpul m_1 în



3

MIȘCAREA PUNCTULUI MATERIAL SUB ACȚIUNEA UNOR TIPURI DE FORȚE

Cunoscînd forțele care acționează asupra punctului material, se poate determina mișcarea sa. Vom studia numai cazurile simple, dar frecvent întîlnite în practică.

3.1. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORMĂ

Conform principiului inerției, un punct material izolat ($\vec{F} = 0$) se mișcă rectiliniu uniform: *vectorul viteză este constant* $\vec{v} = \text{const}$. În acest caz viteza medie coincide cu viteza momentană:

$$v = v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0}, \quad x = x_0 + v(t - t_0), \quad (v = \text{const.}), \tag{3.1}$$

unde x este coordonata mobilului la momentul t, x_0 = coordonata la momentul t_0 și v — *viteza* (constantă) (v este pozitiv dacă mobilul se mișcă în sensul pozitiv al axei Ox). În particular, dacă $t_0 = 0$,

$$x = x_0 + vt, \tag{3.2}$$

unde x_0 este coordonata inițială la momentul inițial $t = 0$.

Dacă reprezentăm grafic legea mișcării (3.2), luînd pe abscisă timpul t și pe ordonată coordonata x, obținem o *linie dreaptă* (fig. 3.1). Legea mișcării (3.1) sau (3.2) este un polinom de *gradul întîi* în timp, adică o *funcție liniară de timp*.

Mișcarea rectilinie uniformă va avea loc și în cazul în care toate acțiunile corpurilor înconjurătoare se compensează reciproc.

Sub formă vectorială:

$$\vec{v} = \vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}, \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0), \quad (\vec{v} = \text{const.}), \tag{3.3}$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziție la momentul t, iar $\vec{r}_0$ — vectorul de poziție la momentul t_0 (de multe ori $t_0 = 0$) (fig. 3.2). Ecuațiile vectoriale (3.3) proiectate pe axa mișcării Ox dau ecuațiile (3.1).

EXPERIMENT

Se realizează montajul din figura 1.29. Bara de rulare (*66*) se orizontalizează cu raportorul (*17*).

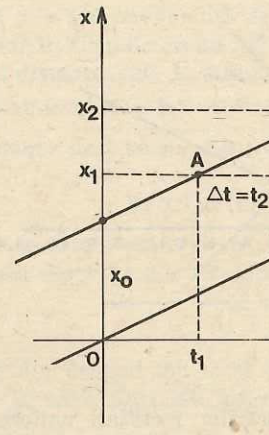
Căruciorul (*27*) încărcat cu greutăți cu șurub (*34*)(150 g) se mișcă inițial sub acțiunea forței F dată de greutățile crestate (*26*). Forța F este anulată apoi prin oprirea greutăților (*26*) pe placa de amortizare (*31*), mișcarea căruciorului făcîndu-se în continuare aproximativ uniform, forțele de frecare fiind neglijabile.

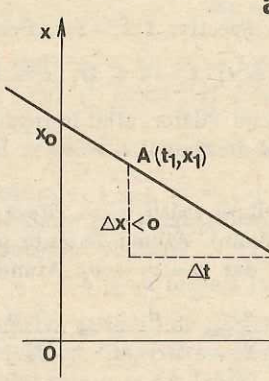
a) Se măsoară viteza pentru diferite distanțe Δx, în diferite puncte ale traiectoriei, exact ca în experimentul de la § 1.12. Ce concluzii desprindeți?

b) Se păstrează întrerupătorul *1* într-o poziție fixă (la începutul riglei gradate) și se mută întrerupătorul *2* din 10 în 10 cm. Pentru fiecare din aceste distanțe se măsoară timpul t. Datele se trec în tabelul următor:

x(m)	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
t(s)					

Reprezentați grafic legea mișcării obținută $x = f(t)$. Calculați panta dreptei (adică $\Delta x/\Delta t$), alegînd două puncte depărtate pe grafic și comparați-o cu viteza obținută mai sus la punctul *a)*. Scrieți ecuația dreptei obținute.





b

Fig. 3.1. Graficul legii m
este o linie dreapt
b) Vite

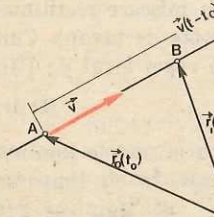


Fig. 3.2. Ecuația
forme sub fo

PROBLEME REZOLVATE

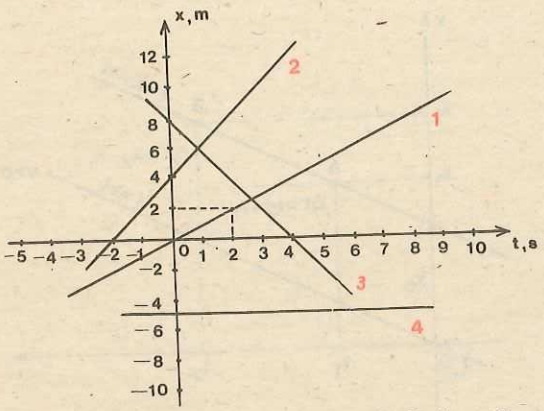


Fig. 3.3. Graficele mișcărilor rectilinii uniforme la problema rezolvată 1.

1. **Să se scrie ecuațiile mișcărilor rectilinii uniforme, reprezentate în figura 3.3.**

Rezolvare. Pe axa Ox, la intersecția cu graficul mișcării, citim coordonata inițială x_0 pentru $t = 0$. Găsim respectiv: 0; 4; 8; -5. Viteza se găsește luînd două puncte convenabile pe grafic (fie punctele de intersecție cu axele, fie originea și un punct de pe grafic), ducînd paralele la axe și calculînd raportul catetelor în triunghiul format: $v = \Delta x/\Delta t$. Găsim respectiv: 1; 2; -2; 0. Prin urmare, ecuațiile sînt ($x = x_0 + vt$):

$$x = t;\quad x = 4 + 2t;\quad x = 8 - 2t;\quad x = -5.$$

2. O scară rulantă ridică un călător, aflat în repaus pe scară, în timpul $t_1 = 30$ s. Pe scara imobilă călătorul urcă în timpul $t_2 = 60$ s. În cît timp t urcă călătorul pe scara mobilă?

Rezolvare. Fie v_s — viteza scării, v_c — viteza călătorului față de scară și v — viteza călătorului față de Pămînt. Atunci distanța parcursă se scrie în cele trei cazuri: $d = v_s t_1 = v_c t_2 = vt$, dar $v = v_c + v_s$. Atunci

$$t = \frac{d}{v} = \frac{d}{v_c + v_s} = \frac{d}{d/t_2 + d/t_1} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 20 \text{ s}.$$

3. Două trenuri merg unul spre celălalt cu viteze $v_1 = 72$ km/h și $v_2 = 54$ km/h. Un călător din primul tren observă că trenul al doilea trece prin dreptul său un timp $\tau = 4{,}0$ s. Care este lungimea trenului al doilea? Care sistem de referință este mai potrivit pentru rezolvare?

Rezolvare. Față de călătorul din primul tren, trenul al doilea trece cu viteza $v_1 + v_2$, deci $l_2 = (v_1 + v_2)\tau = 140$ m. Se poate raționa și față de trenul al doilea.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Într-un vagon aflat în mișcare rectilinie uniformă un elev aruncă vertical în sus o minge (care nu se lovește de tavan). Cum va arăta traiectoria mingii în reperul legat de vagon; dar într-un reper legat de Pămînt?

R: dreaptă verticală; curba din fig. 2.16 (parabolă).

2. Semnalele de radio, ca și undele luminoase, se propagă în vid rectiliniu uniform cu viteza $c = 300\,000$ km/s. În cît timp un semnal de radio se propagă de la Pămînt la Lună și înapoi? În cît timp se propagă lumina de la Soare la Pămînt? (Distanța Pămînt – Lună $d_{PL} = 384\,000$ km, Pămînt-Soare $d_{PS} = 149{,}5 \cdot 10^6$ km.)

R: $t = 2\dfrac{d_{PL}}{c} = 2{,}56$ s; $t = \dfrac{d_{PS}}{c} = 8$ min 18 s.

3. Steaua polară se află la o distanță $d = 460$ ani lumină de reprezintă distanța parcursă de lumină în timp de un an. Să valoarea unui an-lumină, precum și distanța pînă la steaua

R: 1 an-lumină $= 9{,}5 \cdot 10^{12}$

4. În cît timp lumina parcurge o distanță de 1,00 m, dar d hidrogen ($1{,}06 \cdot 10^{-10}$ m)?

R: 3,3 ns (nan

5. Sunetul se propagă în aer practic rectiliniu uniform cu v ce distanță s-a produs un fulger, dacă sunetul s-a auzit dup varea fulgerului?

6. Un autobuz merge prima jumătate din drumul său total iar cealaltă jumătate cu viteza $v_2 = 40$ km/h. Care este vitez întreaga distanță?

R: v_m

7. Ecuațiile mișcării a doi bicicliști sînt: $x_1 = 8t$, $x_2 = 200$ grafic legile mișcării și să se afle locul și momentul întî coeficientul lui t în aceste ecuații?

R: $x =$

8. Ecuațiile mișcării a două mobile sînt: $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 +$ Să se construiască graficele mișcării. Să se afle locul și mom Care este semnificația fizică a răspunsului obținut?

R: $x = 0$, $t = -1$ s (s-au întîlnit în

9. O barcă cu motor, mișcîndu-se împotriva sensului de curger distanță $d = 9{,}0$ km în $\tau = 0{,}50$ h. În cît timp va parcurg înapoi, dacă viteza de curgere a rîului este $v = 6{,}0$ km/h?

R: $\tau' = \tau$

10. Distanța $d = 100$ km dintre două porturi fluviale este parcu curentului în $t_1 = 4{,}0$ h, iar împotriva curentului în $t_2 = 10{,}$ și viteza șalupei față de apă?

R: $v_a = \dfrac{t_2 - t_1}{2t_1 t_2} d = 7{,}5$ km/h; $v_0 =$

11. În cît timp este ridicat de o scară rulantă un om care stă p viteză relativă față de scară, omul urcă scara nemișcată în pe scară mobilă în $t_2 = 30$ s?

12. Din București și Ploiești pleacă simultan unul spre celălal vitezele constante $v_1 = 60$ km/h și respectiv $v_2 = 40$ km/h. În a din autobuze își ia zborul spre celălalt autobuz un porumbel zboare neîntrerupt, între cele două autobuze, de la unul la stantă $v = 70$ km/h, pînă la întîlnirea autobuzelor. Ce drum t (Distanța București — Ploiesti este $d = 60$ km.)

R:

13. Pe șoseaua București-Brașov, pleacă din București un camion cu viteza $v_1 = 50$ km/h. Din Ploiești (la distanța $s_0 = 60$ km) pleacă un alt camion cu viteza $v_2 = 60$ km/h, după un timp $t_0 = 1{,}5$ h de la plecarea primului camion. După cît timp și în ce loc se vor întîlni camioanele? Să se reprezinte grafic pe aceeași diagramă coordonatele celor două camioane în funcție de timp.

R: $T = \dfrac{v_2 t_0 - s_0}{v_2 - v_1} = 3{,}0$ h; $L = v_1 T = 150$ km.

14. Un barcagiu vîslește perpendicular către țărm cu o viteză $v_0 = 7{,}2$ km/h față de apă. Cursul apei deplasează barca cu o distanță $d = 150$ m în josul rîului. Lățimea rîului este $L = 500$ m. Care este viteza rîului și durata traversării rîului?

R: $v = v_0 d/L = 0{,}60$ m/s; $T = L/v_0 = 4$ min 10 s.

15. Pe un strung trebuie strunjită o piesă de forma unui trunchi de con cu razele bazelor $r_1 = 15$ mm, $r_2 = 20$ mm și înălțimea $h = 50$ mm. Viteza de deplasare longitudinală a cuțitului este $v_1 = 5{,}0$ mm/s. Care trebuie să fie viteza v_2 de avans transversal?

R: $v_2 = v_1 \dfrac{r_2 - r_1}{h} = 0{,}50$ mm/s.

3.2. MIȘCAREA RECTILINIE UNIFORM VARIATĂ

Dacă vectorul forță este *constant*, atunci din legea fundamentală rezultă că *și vectorul accelerație este constant:* $\vec{a} = \vec{F}/m = \text{const.}$ În acest caz accelerația medie coincide cu accelerația momentană: $\vec{a}_m = \vec{a}$.

Dacă forța are direcția vitezei, mișcarea va fi *rectilinie*. În adevăr, accelerația și variația vitezei au direcția și sensul forței: $\vec{F} = m\vec{a} = m\Delta\vec{v}/\Delta t$, deci în acest caz variația vitezei $\Delta\vec{v}$ are direcția vitezei, care își păstrează astfel direcția neschimbată.

Vectorii forță, viteză și accelerație sînt toți pe aceeași dreaptă pe care o alegem drept axă a coordonatelor Ox (a absciselor). Sensul pozitiv pe axă se alege de obicei în sensul vitezei (inițiale).

3.2.1. **Legea vitezei.** Din definiția accelerației rezultă:

$$a = a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \text{const.} \rightarrow v = v_0 + a(t - t_0), \qquad (3.4)$$

unde v este viteza la un moment oarecare t și v_0 este viteza la momentul t_0, iar a este *accelerația constantă*. Aceasta este *ecuația sau legea vitezei în mișcarea rectilinie uniform variată.*

În particular, dacă viteza (inițială) v_0 este cunoscută pentru momentul (inițial) $t = 0$ (adică $t_0 = 0$), ecuația de mai sus devine:

$$v = v_0 + at. \qquad (3.5)$$

În diagrama viteză – timp această ecuație se reprezintă printr-o *linie dreaptă* (fig. 3.4 și 3.5), de aceea se spune că *în mișcarea rectilinie uniform variată viteza variază liniar cu timpul* sau *este o funcție liniară de timp* (adică este un polinom de gradul întîi în timp). Panta acestei drepte este chiar accelerația a.

Viteza inițială v_0 (la momentul inițial $t = 0$) poate fi pozitivă (mobilul se mișcă în momentul $t = 0$ în sensul pozitiv al axei), negativă (mobilul se mișcă în momentul $t = 0$ în sensul negativ al axei) sau nulă (mobilul era în repaus în momentul $t = 0$). În ultimul caz legea (3.5) devine $v = at$, adică viteza crește proporțional cu timpul. De obicei alegem sensul pozitiv al axei în sensul vitezei inițiale v_0 (atunci $v_0 > 0$) sau al accelerației dacă $v_0 = 0$ (atunci $a > 0$).

Din graficul vitezei putem determina accelerația, luînd două puncte pe grafic $A(t_1, v_1)$ și $B(t_2, v_2)$ și calculînd $\Delta v/\Delta t$, adică panta dreptei (fig. 3.4 și 3.5).

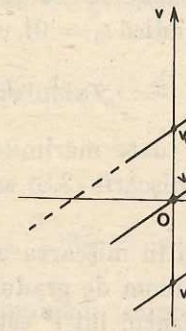


Fig. 3.4. Graficu variată

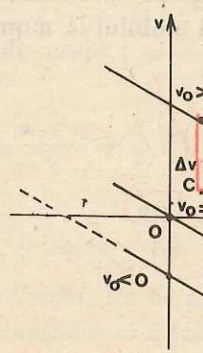


Fig. 3.5. Graficu form variată

3.2.2. **Legea mișcării.** Din expresia vitezei $= (x - x_0) / (t - t_0)$, rezultă

$$x = x_0 + v_m(t - t_0).$$

În mișcarea uniform variată, cînd viteza este o viteza medie este egală cu *media aritmetică* a viteze intervalul considerat, de aceea (3.6) devine:

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)(t - t_0).$$

Cum $v = v_0 + a(t - t_0)$, ecuația (3.7) devine:

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0$$

Aceasta este *legea mișcării rectilinii uniform variate.*

Pentru a scrie ecuația (3.8) trebuie să cunoaș *adică coordonata și viteza la un moment dat:* $x = x_0$

În particular, dacă cunoaștem coordonata (inițială) x_0 și viteza (inițială) v_0 la momentul inițial $t = 0$ (adică $t_0 = 0$), ecuația precedentă devine mai simplă:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \tag{3.9}$$

În ecuațiile (3.8) și (3.9) toate mărimile pot fi pozitive, negative sau nule.

Reciproc, din legea mișcării (3.8) sau (3.9) se obține legea vitezei (3.4) sau (3.5).

Coordonata mobilului în mișcarea uniform variată este o funcție *pătratică de timp* (adică un polinom de gradul doi în timp). Coeficientul lui t este viteza inițială, iar coeficientul lui t^2 este *jumătate* din accelerație (termenul liber este coordonata inițială).

De obicei alegem originea coordonatelor (de unde măsurăm coordonata) în punctul în care se află mobilul la momentul inițial $t = 0$, atunci $x_0 = 0$, iar sensul pozitiv al axei îl luăm în sensul vitezei inițiale v_0, atunci $v_0 > 0$. În cazul $x_0 = 0$, avem

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \tag{3.10}$$

Dacă și $v_0 = 0$, ecuația devine

$$x = \frac{1}{2} at^2, \tag{3.11}$$

adică, dacă mobilul pleacă din repaus din originea coordonatelor, coordonata sa este proporțională cu *pătratul timpului*.

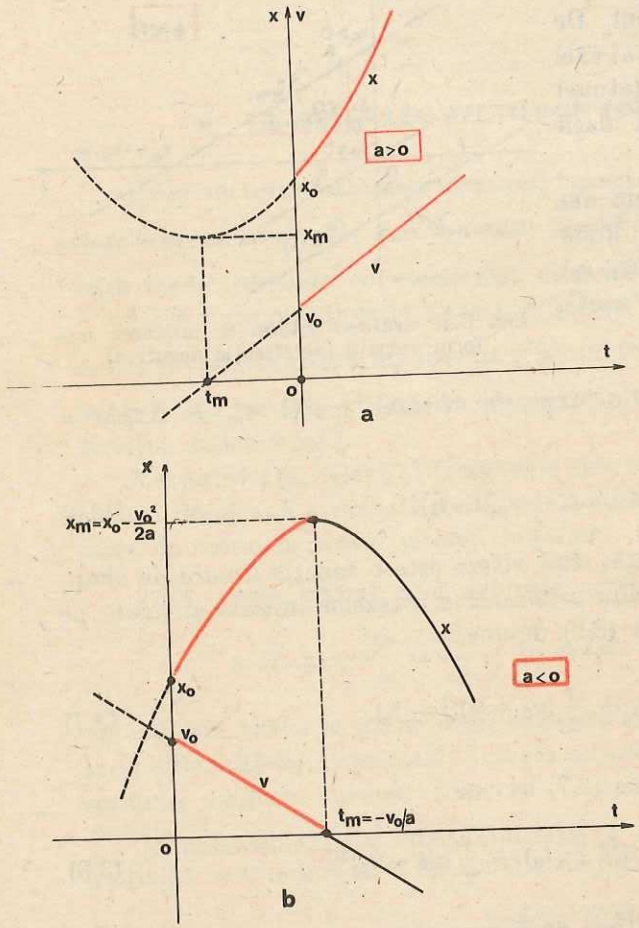


Fig. 3.6. *a)* Dacă accelerația este pozitivă, coordonata are un minim cînd mobilul are viteză nulă. *b)* Dacă accelerația este negativă coordonata are un

Reprezentînd grafic legea (3.9), obținem curbele din figura 3.6 (graficul unei funcții pătratice este o *parabolă*). De obicei $v_0 > 0$ și ne interesează mișcarea numai pentru $t > 0$.

Dacă accelerația este *negativă*, graficul are un maxim în momentul opririi mobilului.

Dacă $v_0 > 0$ și $a < 0$ mobilul se depărtează de origine *încetinit*, la un moment dat se oprește ($v = 0$, x maxim) și se întoarce înapoi ($v < 0$). Durata mișcării pînă la oprire se obține de oprire $v = 0$:

$$0 = v_0 + at, \text{ de unde } t_m = -$$

iar coordonata maximă

$$x_m = x_0 + v_0 t_m + \frac{1}{2} at_m^2 = x_0$$

3.2.3. **Formula lui Galilei.** Să eliminăm timpu a vitezei (3.5) și a coordonatei (3.9). Scoatem timp introducem în ecuația coordonatei:

$$v = v_0 + at, \text{ de unde } t = \frac{v}{}$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = x_0 + v_0 \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} a \left($$

sau

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0).$$

Aceasta este *ecuația sau formula lui Galilei*. Ea ne p mobilului pentru orice poziție a sa. Punînd $v = 0$ (co (3.13).

De obicei $x_0 = 0$, adică alegem originea coordo se afla mobilul la $t = 0$. Atunci (3.14) devine

$$v^2 = v_0^2 + 2ax.$$

În particular, dacă și $v_0 = 0$, adică mobilul pleacă di

$$v^2 = 2ax.$$

Menționăm că ecuațiile mișcării rectilinii uniform astfel:

$$\vec{a} = \vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}, \text{ de unde } \vec{v} = \vec{v}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{a}(t - t_0$$

Bineînțeles, din legea mișcării (3.18) se poate obține prin pr (3.17). Proiectînd aceste ecuații vectoriale pe axa mișcării, cunoscute (pe componente). Mai mult, aceste ecuații vecto vectorii $\vec{v}_0$ și $\vec{a}$ ($\vec{a} = \text{const}$) *nu* sînt coliniari și deci mișcarea în planul definit de vectorii $(\vec{v}_0, \vec{a})$ sau $(\vec{v}_0, \vec{F})$, de exemplu în c gravitațional terestru (atunci $\vec{a} = \vec{g}$).

Se foloseşte montajul din figura 1.29.

a) Legea mişcării rectilinii uniform variate. Se procedează ca la experimentul de la § 3.1, (*b*).

Se va reprezenta grafic legea mişcării $x = f(t)$. Teoretic, ecuaţia mişcării trebuie să fie $x = \frac{1}{2} at^2$ (parabolă). Dacă trasăm graficul $x = F(t^2)$ trebuie să obţinem o *dreaptă* cu panta $\frac{a}{2}$. De aceea se va trasa şi graficul $x = F(t^2)$ şi luînd două puncte convenabile pe grafic (aproximat printr-o dreaptă) se va calcula panta $a/2$ deci acceleraţia a.

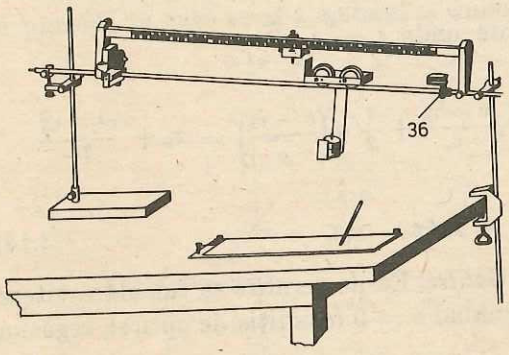


Fig. 3.7. Montaj pentru verificarea legilor mişcării rectilinii uniform variate.

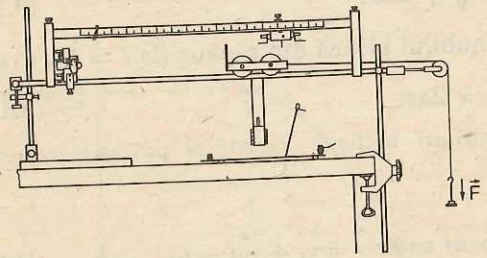


Fig. 3.8. Montaj pentru verificarea legii fundamentale a dinamicii.

b) Legea vitezei în mişcarea rectilinie uniform variată. Se montează dispozitivul de prindere (*31*, *32*) astfel încît să reţină greutăţile (*26*) cînd căruciorul a străbătut fiecare din distanţele x de la experimentul precedent (fig. 3.7). În dreptul fiecărei valori x, se montează întrerupătorul (*18*) şi la o distanţă convenabilă $\Delta x'$ de acesta se montează întrerupătorul (*23*). Pe distanţa Δx parcursă în timpul $\Delta t'$, căruciorul se mişcă practic uniform *cu viteza avută în dreptul coordonatei* x, deci $v(x) = \Delta x'/\Delta t'$.

Se va reprezenta grafic legea vitezei $v = f(t)$. Teoretic, legea vitezei trebuie să fie $v = at$ (dreaptă). Se va calcula panta dreptei obţinute, deci acceleraţia a, şi se va compara cu acceleţia obţinută în experienţa precedentă, din legea mişcării.

c) Legea fundamentală a dinamicii. Se realizează montajul din figura 3.8 (montajul detaliat este dat în figura 1.29). Se aleg diferite distanţe x ($\sim 0{,}5 - 0{,}7$ m) de la vîrful electromagnetului pînă la întrerupătorul 2. Forţa F este dată de greutăţile crestate (*26*), căruciorul (*27*) fiind încărcat cu greutăţile cu şurub (*34*).

În prima variantă, pentru o distanţă aleasă x se măsoară timpul de miş-

raportul F/a, care trebuie să coincidă cu masa $(M + m)$ cior cu greutăţi cu şurub + cîrligul cu greutăţile crestate

În a doua variantă, se păstrează *constantă* forţa F crestate (*26*) şi se modifică încărcarea M a căruciorului

PROBLEME REZOLVATE

Peste tot unde este posibil alegem originea coordonatelor în p mobilul la $t = 0$ (atunci $x_0 = 0$), iar sensul pozitiv pe axa mişcă vitezei iniţiale (atunci $v_0 > 0$) sau al acceleraţiei (forţei) dacă v

1. Un şofer începe să frîneze automobilul pe un drum orizontal d $= 25$ m de un obstacol. Forţa de frînare este $F_f = 1{,}5$ kN, ia $m = 750$ kg.
Care este viteza maximă admisibilă v_0 a automobilului pentru c înainte de obstacol?

Rezolvare. Forţa de greutate a automobilului este anulată de reacţiunea normală a solului. Rămîne forţa de frînare orientată în sens invers mişcării (fig. 3.9). Alegînd axa Ox în sensul mişcării, avem

$$-F_f = ma, \text{ de unde } a = -F_f/m$$

(acceleraţia, la fel ca şi forţa, este orientată în sensul opus vitezei). Aplicînd direct formula (3.13) cu $x_0 = 0$, avem

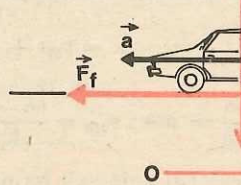


Fig. 3.9. La problem

$$d = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2F_f} m, \text{ de unde } v_0 = \sqrt{2F_f d/m} = 10 \text{ m/s}$$

Putem aplica de asemenea formula lui Galilei (cu $x_0 = 0$), punî $v = 0$.

2. Două corpuri pornesc din acelaşi punct pe aceeaşi direcţie cu $= 4{,}0$ m/s, respectiv $v_{02} = 3{,}0$ m/s şi acceleraţiile $a_1 = 2{,}0$ m $= 3{,}0$ m/s^2, corpul *2* însă la un interval $\tau = 2{,}0$ s mai tîrziu d afle: *a)* după cît timp şi la ce distanţă se vor întîlni corpurile; corpurilor de la plecare pînă la întîlnire.

Rezolvare. a) Alegem originea timpului în momentul cînd porneş $x_1 = v_{01}t + \frac{1}{2} a_1 t^2$ şi $x_2 = v_{02}(t - \tau) + \frac{1}{2} a_2 (t - \tau)^2$ (pentru al

În momentul întîlnirii $x_1 = x_2$ (corpurile se află în acelaşi punc de origine):

$$v_{01}t + \frac{1}{2} a_1 t^2 = v_{02}(t - \tau) + \frac{1}{2} a_2 (t - \tau)^2,$$

de unde $t^2 - 14t = 0$ cu soluţiile $t = 0$ şi $t = 14$ s. Prima solu deoarece corpul *2* pleacă abia peste $\tau = 2{,}0$ s. Coordonata punct

$$x = v_{01}t + \frac{1}{2} a_1 t^2 = 252 \text{ m}.$$

b) Vitezele medii:

$$v_{1m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{252}{14} = 18 \text{ m/s}; \quad v_{2m} = \frac{252}{12} = 21 \text{ m/s}.$$

3. Din originea axei Ox pleacă un mobil cu viteza inițială $v_{01} = 2{,}0$ m/s și accelerația $a_1 = 3{,}0$ m/s². În același moment, dintr-un punct de pe axa Ox, de abscisă $x_0 = 18$ m, pleacă un al doilea mobil cu viteza inițială $v_{02} = 5{,}0$ m/s și accelerația $a_2 = 1{,}0$ m/s².

a) După cît timp și la ce distanță se întîlnesc mobilele? *b)* Care sînt vitezele medii ale mobilelor în acest timp?

Rezolvare. a) Ecuațiile pentru coordonatele celor două mobile sînt:

$$x_1 = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2; \quad x_2 = x_0 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2.$$

Condiția de întîlnire $x_1 = x_2$ dă

$$v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = x_0 + v_{02}t + \frac{1}{2}a_2t^2 \text{ sau } t^2 - 3t - 18 = 0$$

cu soluțiile $t = -3{,}0$ s și $t = 6{,}0$ s. Prima soluție este inacceptabilă deoarece înseamnă întîlnirea mobilelor anterior ($t < 0$) plecării lor. Punctul de întîlnire:

$$x = v_{01}t + \frac{1}{2}a_1t^2 = 66 \text{ m}.$$

b) $v_{1m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{66}{6{,}0} = \text{m/s}; \quad v_{2m} = \frac{66 - 18}{6{,}0} = 8{,}0 \text{ m/s}.$

4. Fie legea vitezei $v = f(t)$ dată sub forma tabelului:

t[s]	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$v\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$	1,0	1,0	1,0	2,0	4,0	8,0	10,0	4,0	0	−2,0	0	0	0

Să se reprezinte grafic această lege. *a)* Să se calculeze accelerația medie în intervalele de timp: (−4; −2) s, (−2; 2) s, (2; 5) s, (5; 6) s și (6; 8)s. *b)* Care este accelerația momentană a mobilului la momentul $t = 2{,}0$ s?

Rezolvare. Graficul este dat în figura 3.10.

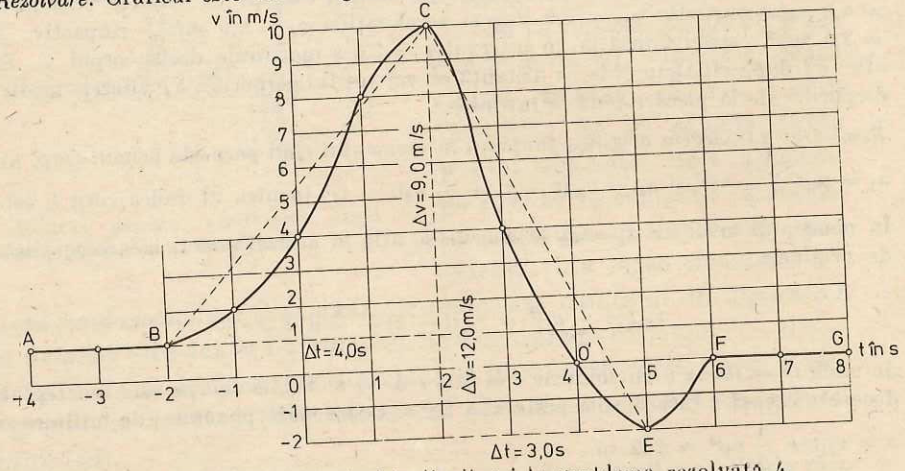


Fig. 3.10. Graficul legii vitezei la problema rezolvată 4.

a) Accelerațiile medii sînt:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0}{2} = 0; \quad \frac{10{,}0 - 1{,}0}{2{,}0 - (-2{,}0)} = 2{,}25 \text{ m/s}^2; \quad \frac{-2{,}0 \ -10}{5{,}0 - 2{,}0}$$

$$\frac{0{,}0 - (-2{,}0)}{6{,}0 - 5{,}0} = 2{,}0 \text{ m/s}^2; \quad \frac{0}{2} = 0.$$

b) Pentru un interval Δt foarte mic, descrescînd către zero, luat Δv este zero, viteza este constantă, graficul vitezei fiind aici

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Cum va arăta graficul vitezei în cazul accelerației nule?

R

2. Legea mișcării rectilinii a unui corp este dată de ecuația $x = 2$ scrie legea vitezei.

3. Dacă accelerația *nu* este constantă, se poate calcula viteza me linie ca media aritmetică $v_m = (v_0 + v)/2$?

4. Să se arate că pentru mișcarea uniform variată avem:

$$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2}t.$$

5. Un tren electric se mișcă cu viteza $v_0 = 72$ km/h. Întrerupînd trenul se oprește (uniform încetinit) după $\Delta t = 20$ s. Să se afle pînă la oprire.

R: $a = -\frac{v_0}{\Delta t} = -1{,}0 \text{ m/s}^2$;

6. Un automobil pornește cu accelerația $a = 0{,}40$ m/s². Cît timp îi rească viteza de la $v_1 = 12$ m/s la $v_2 = 20$ m/s?

R:

7. O săniuță coboară liber, uniform accelerat, pe un deal de lungi timp $t = 10$ s. Care a fost accelerația și ce viteză a căpătat la

R: $a = \frac{2l}{t^2} = 1{,}2$ m

8. Un schior parcurge cu accelerația $a = 0{,}30$ m/s² o porțiune de $\Delta t = 20$ s. Care a fost viteza schiorului la începutul și la sfîrșit

R: $v_{1,2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \mp a$

9. Un corp cu masa $m = 0{,}50$ kg este tras orizontal rectiliniu unif zontală (cu frecare) cu ajutorul unui dinamometru care arată o for accelerație se va mișca același corp dacă dinamometrul va arăta

R: $a =$

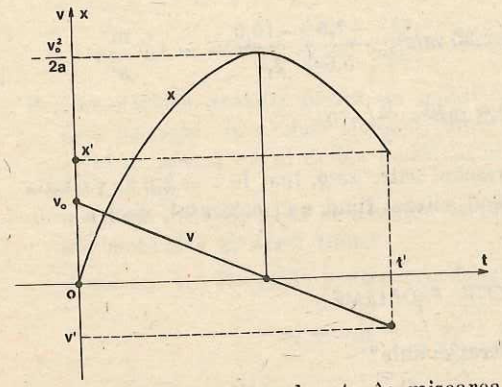


Fig. 3.11. Viteza și coordonata în mișcarea uniform variată din problema 12.

10. Un corp pornește fără viteză inițială. În prima secundă el parcurge o distanță egală cu 1 m, în a doua secundă parcurge o distanță egală cu 2 m și așa mai departe, în a n-a secundă parcurge o distanță egală cu n metri. Este aceasta o mișcare uniform accelerată?

R: nu.

11. Un corp pornește uniform accelerat cu viteza inițială $v_0 = 2{,}0$ m/s și ajunge în punctul $x_0 = 300$ m după $\tau = 1{,}0$ min. Să se afle accelerația și viteza finală.

R: $a = 2(x_0 - v_0\tau)/\tau^2 = 0{,}10$ m/s^2; $v' = 2x_0/\tau - v_0 = 8{,}0$ m/s.

12. Un mobil pornește uniform variat din originea axei Ox cu viteza inițială $v_0 = 15$ m/s. După un timp t' mobilul trece prin punctul de abscisă $x' = 10$ m cu viteza $v' = -10$ m/s. Să se calculeze: *a)* accelerația; *b)* timpul t'; *c)* distanța parcursă în acest timp; *d)* viteza în modul, medie. Să se reprezinte grafic, pe aceeași diagramă, viteza și coordonata.

R: *a)* $a = \dfrac{v'^2 - v_0^2}{2x'} = -6{,}25$ m/s^2; *b)* $t' = \dfrac{2x'}{v_0 + v'} = 4{,}0$ s;

c) $d = x' \dfrac{v_0^2 + v'^2}{v_0^2 - v'^2} = 26$ m; *d)* $|v|_m = \dfrac{d}{t'} = \dfrac{v_0^2 + v'^2}{2(v_0 - v')} = 6{,}5$ m/s;

curba și dreapta din figura 3.11.

13. Un corp mișcat uniform variat parcurge prima jumătate din drumul său $d = 150$ m în timpul $t_1 = 10$ s, iar cealaltă jumătate în $t_2 = 5{,}0$ s. Să se afle accelerația și viteza inițială ale corpului.

R: $a = d\dfrac{t_1 - t_2}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)} = 1{,}0$ m/s^2; $v_0 = d/2t_1 - \dfrac{1}{2}at_1 = 2{,}5$ m/s.

14. Din originea axei Ox pleacă un mobil cu viteza constantă $v' = 1{,}0$ m/s, iar după $\tau = 5{,}0$ s un al doilea mobil cu viteza inițială $v_0 = 5{,}0$ m/s și accelerația $a = -0{,}70$ m/s^2. Să se afle după cît timp de la pornirea mobilului *2* se vor întîlni mobilele.

R: $v'(t + \tau) = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$, de unde $t = \dfrac{10}{7}$ s și 10 s.

3.3. MIȘCAREA CORPURILOR SUB ACȚIUNEA GREUTĂȚII

3.3.1. **Căderea liberă.** Greutatea unui corp este *forța* cu care acesta întinde firul sau resortul de care este suspendat. Ea are direcția „firului cu plumb". Sau, altfel, greutatea unui corp este forța cu care acesta apasă asupra unui plan orizontal pe care este așezat (planul orizontal este perpendicular pe direcția firului cu plumb). Greutatea unui corp se datorește atracției gravitaționale dintre corp și Pămînt. Dacă neglijăm efectele rotați tului și neomogenitățile globului terestru (care sînt majoritatea covîrșitoare a nevoilor practicii), atun

Greutatea unui corp este forța cu care acesta es direcția razei terestre din acel loc.

Corpurile lăsate liber în vid, fără viteză inițială, greutății lor, cu aceeași accelerație gravitațională dentă de masa corpului, natura, dimensiunile sau legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$, rezultă atunci

$$\vec{G} = m\vec{g},$$

unde $\vec{g}$ în același loc este același pentru toate corpu vedi experimental cu ajutorul tubului lui Newton – care sînt introduse diferite obiecte. Răsturnînd tubul cu aceeași accelerație. În aer însă, corpurile cad cu a pe lîngă greutatea lor $m\vec{g}$, acționează și o forță de r lui, care depinde sensibil de dimensiunile și de forma vom neglija forța de rezistență a aerului (de mici și grele).

Accelerația gravitațională de cădere liberă $\vec{g}$ distanța pînă la centrul Pămîntului) și puțin de lat Pămîntului la poli și a rotației Pămîntului).

Accelerația gravitațională *normală* (sau standa

$$g_n = 9{,}80665 \text{ m/s}^2.$$

La nivelul mării și la paralela 45° : $g_0 = 9{,}80616$ m

Prin urmare, toate corpurile care se mișcă libe rație $\vec{g} = \vec{G}/m$, orientată vertical în jos la fel ca și forț

Dacă viteza inițială este verticală (sau nulă) verticală (forța fiind verticală) *uniform variat*. Alegî avem

$$v = v_0 - g(t - t_0),\ y = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

și în particular, dacă condițiile inițiale y_0, v_0 se r (adică $t_0 = 0$), avem mai simplu

$$v = v_0 - gt,\ y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2, (g$$

În ecuațiile de mai sus, y, y_0, v, v_0 pot avea difer poziția și sensul mișcării corpului pe axa aleasă (vectorului accelerație $\vec{g}$ pe axa Oy aleasă).

Desigur, se poate alege o axă Oy cu sensul pozitiv în jos, atunci

$$v = v_0 + g(t - t_0), \quad y = y_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2} g(t - t_0)^2, \quad (g \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2), \quad (3.23)$$

unde y, y_0, v, v_0 au semne corespunzătoare noii axe ($+g$ este acum componenta vectorului $\vec{g}$ pe axa aleasă).

EXEMPLE

1. Un corp cade liber (fără viteză inițială) de la o înălțime h. Să se afle viteza și timpul de cădere.

Rezolvare. Este mai convenabil să alegem axa verticală Oy cu sensul pozitiv în jos și cu originea în punctul de unde cade corpul la momentul $t = 0$ (fig. 3.12). Atunci

$$v = gt, \quad h = \frac{1}{2} gt^2, \quad \text{de unde} \quad v = \sqrt{2gh}, \quad t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad (3.24)$$

corpul cade accelerat cu accelerația g.

2. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0. Să se afle timpul de urcare și înălțimea maximă la care se ridică corpul.

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical, cu sensul pozitiv în sus și cu originea în punctul de unde se aruncă corpul (fig. 3.13). Atunci

$$v = v_0 - gt, \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (3.25)$$

Punînd condiția de oprire $v = 0$, găsim timpul de urcare și apoi înălțimea maximă:

$$0 = v_0 - gt, \quad t_u = \frac{v_0}{g}, \quad h = y_m = v_0 t_u - \frac{1}{2} g t_u^2 = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (3.26)$$

corpul urcă încetinit cu accelerația $-g$.

Aceste rezultate se obțin și din formulele (3.12—3.13) pentru timpul pînă la oprire și distanța maximă din cazul mișcării uniform încetinite, dacă punem acolo $a = -g$.

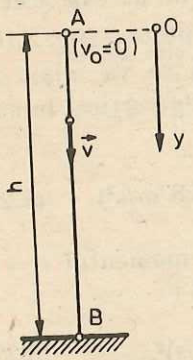


Fig. 3.12. Căderea liberă de la o înălțime h. (Exemplul 1.)

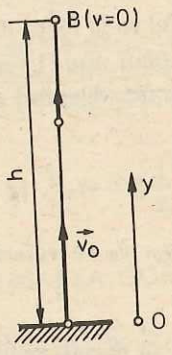


Fig. 3.13. Aruncarea unui corp vertical în sus cu viteza inițială v_0. (Exemplul 2.)

După atingerea înălțimii maxime și oprire, corpul cade înapoi accelerat și cînd ajunge din nou la punctul de lansare va avea viteza finală v', egală în modul și de sens opus cu viteza inițială de lansare v_0. De asemenea, timpul de urcare este egal cu timpul de coborîre:

$$v' = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \cdot \frac{v_0^2}{2g}} = v_0;$$

$$t_u = \frac{v_0}{g} = \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{2g} \cdot \frac{2}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_c. \quad (3.27)$$

Observăm că ecuațiile (3.25) descriu atît urcarea, cît și coborîrea ulterioară a corpului.

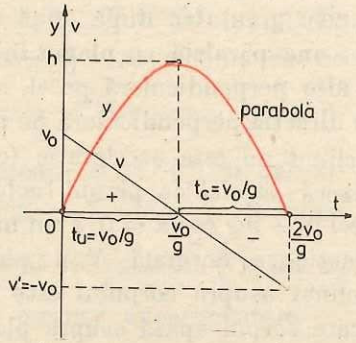


Fig. 3.14. Graficul vitezei și coordonatei unui corp aruncat vertical în sus cu viteza inițială v_0.

Dacă reprezentăm grafic pe aceeași diagramă pe v și p

$v = v_0 - gt$, $y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$, obținem o linie dreaptă (

tru y) (fig. 3.14).

EXPERIMENT

Studiul căderii libere. Montajul mecanic este d

Corpul a cărui mișcare se analizează este o bi

miezului electromagnetului (*20*) se lasă să cadă bila

Montajul electric este dat în figura 3.16.

Experimentul se face montînd captorul, succe

față de reperul 0 al riglei și măsurînd de fiecare d

Se va reprezenta grafic legea mișcării $y = f(t)$. Teoretic: $y = \frac{1}{2} gt^2$ — parabolă. De aceea, se va trasa și graficul $y = F(t^2)$, care trebuie să fie o dreaptă cu panta $g/2$, de unde se obține accelerația gravitațională g.

3.3.2. **Mișcarea pe plan înclinat.** Vom neglija frecările dintre corp și planul înclinat (de exemplu, un cărucior pe șine netede). În acest caz asupra corpului acționează: forța de greutate $\vec{G} = m\vec{g}$ și reacțiunea normală $\vec{N}$ a planului

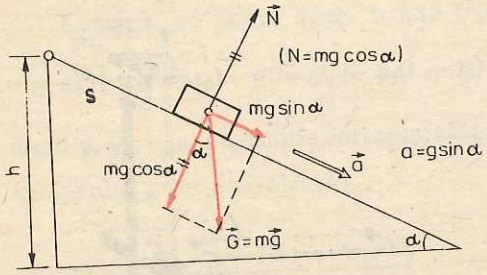


Fig. 3.17. Mișcarea pe plan înclinat fără frecare.

înclinat (fig. 3.17). Dacă descompunem greutatea după două direcții: una paralelă cu planul înclinat și alta perpendiculară pe el, atunci pe direcția perpendiculară pe planul înclinat nu este accelerație (corpul lunecă *paralel* cu planul înclinat!), deci $N - mg \cos \alpha = 0$. Prin urmare reacțiunea normală N a planului înclinat asupra corpului este egală cu componenta $mg \cos \alpha$ a greutății, cu care corpul apasă asupra planului înclinat. În adevăr, corpul nu apasă asupra planului înclinat cu toată greutatea sa mg, ci numai cu componenta normală $mg \cos \alpha$, cealaltă componentă $mg \sin \alpha$ fiind *paralelă* cu planul înclinat.

Componenta $mg \sin \alpha$, paralelă cu planul înclinat (ea este bineînțeles rezultanta celor două forțe $\vec{G}$ și $\vec{N}$), imprimă corpului o accelerație

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg \sin \alpha}{m} = g \sin \alpha \qquad (3.28)$$

în direcția și sensul acestei forțe, adică paralelă cu planul înclinat și îndreptată în jos.

Prin urmare, un corp lăsat liber pe un plan înclinat fără frecări, va coborî uniform accelerat cu accelerația $a = g \sin \alpha$, iar lansat în sus de-a lungul planului înclinat cu viteza inițială v_0 va urca încetinit, se va opri și apoi se va întoarce înapoi accelerat. Situația este perfect asemănătoare cu cea din mișcarea pe verticală în cîmp gravitațional, cu singura deosebire că mișcarea se face paralel cu planul înclinat (și nu pe verticală), cu accelerația $a = g \sin \alpha$ (în loc de g).

Dacă notăm cu h înălțimea de la care coboară liber corpul și cu s lungimea corespunzătoare a planului înclinat, atunci $h = s \sin \alpha$. Deci la coborîre liberă (fără viteză inițială):

$$v = \sqrt{2as} = \sqrt{2g \sin \alpha \cdot s} = \sqrt{2gh}, \; t_c = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{g \sin \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (3.29)$$

și la urcare cu viteza inițială v_0:

$$t_u = \frac{v_0}{g \sin \alpha}, \; s = \frac{v_0^2}{2g \sin \alpha}, \; h = \frac{v_0^2}{2g}; \; (t_c = t_u, \; v' = -v_0). \qquad (3.30)$$

EXPERIMENT

Mișcarea pe planul înclinat. Se reface montajul din figura 1.29. Montajul electric este prezentat în figura 3.18.

Experimentul se realizează înclinînd bara de rulare cu 5°, fixînd întrerupătorul electric în poziția 1 și măsurînd timpul de mișcare respectiv.

Se va reprezenta grafic legea mișcării $x = f(t)$. Teoretic (cu neglijările respective) ea trebuie să fie $x = \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2$. De aceea reprezentînd dependența $x = F(t^2)$ și aproximînd-o printr-o dreaptă, panta acesteia trebuie să fie egală cu $\frac{1}{2} g \sin \alpha$, în limitele erorilor experimentale.

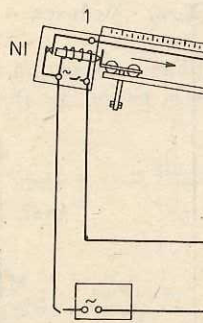


Fig. 3.18. Montaju diul mișcării

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 15$ m fără viteză inițiaaruncat vertical în sus un al doilea corp cu viteză inițială $v_0 =$ și la ce înălțime deasupra solului se întîlnesc corpurile?

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în sus cu originea în punctu corpul *2* (fig. 3.19). Atunci, ecuațiile mișcării sînt:

$$y_1 = h - \frac{1}{2} g t_m^2, \; y_2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Punem condiția de întîlnire $y_1 = y_2$ (în momentul întîlnirii la originea O este aceeași):

$$y_1 = y_2, \; h - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2,$$

de unde

$$t_m = \frac{h}{v_0} = 1{,}5 \text{ s}; \; y_m = h - \frac{1}{2} g t_m^2 = 4{,}0 \text{ m}$$

2. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale $= 40$ m/s, corpul *2* la un interval $\tau = 6{,}0$ s după primul. Dupățime deasupra solului se vor întîlni corpurile ? (Se va lua $g =$

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în sus. Atunci ecuațiile mișcării sînt:

$$y_1 = v_{01} t - \frac{1}{2} g t^2, \; y_2 = v_{02}(t - \tau) - \frac{1}{2} g (t - \tau)^2.$$

Punînd condiția de întîlnire $y_1 = y_2$, găsim

$$t_m = \frac{g\tau^2/2 + v_{02}\tau}{g\tau + v_{02} - v_{01}} = 10{,}5 \text{ s};$$

$$y_m = v_{01} t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 = 78{,}8 \text{ m}.$$

3. Un corp cade liber (în vid) fără viteză inițială dintr-un punc A aflat la o înălțime $H = 4{,}9$ m. Simultan, dintr-un punct situat cu $h = 2{,}0$ m mai jos de A, este aruncat vertical în su un al doilea corp. Cu ce viteză inițială v_0 a fost aruncat acesta dacă a ajuns pe Pămînt simultan cu primul?

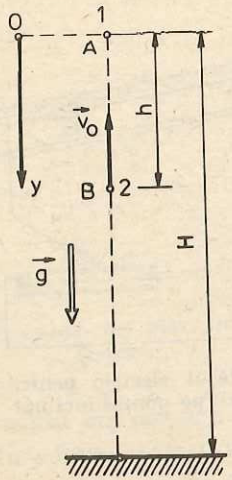


Fig. 3.20. La problema rezolvată 3.

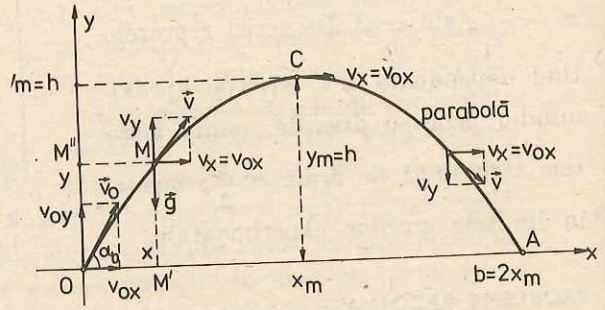


Fig. 3.21. Mișcarea în cîmp gravitațional terestru. (Problema rezolvată 4.)

Rezolvare. Alegem axa Oy vertical în jos, cu originea în punctul A (fig. 3.20). Atunci ecuațiile mișcării sînt:

$$y_1 = \frac{1}{2} gt^2,\ y_2 = h - v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$$

(componenta vitezei inițiale $\vec{v}_0$ pe axa aleasă este $-v_0$).
Condiția de întîlnire la suprafața pămîntului este:

$$y_1 = y_2 = H, \text{ adică } \frac{1}{2} gt^2 = h - v_0 t + \frac{1}{2} gt^2 = H,$$

de unde

$$t_m = h/v_0 \text{ și } v_0 = h\sqrt{\frac{g}{2H}} = 2{,}0 \text{ m/s}.$$

4.* Să se studieze aruncarea oblică a unui corp (în vid) cu o viteză inițială $\vec{v}_0$ care face un unghi α_0 cu orizontala.

Rezolvare. Mișcarea va avea loc în planul vertical conținînd forța $\vec{G} = m\vec{g}$ și viteza $\vec{v}_0$, și se descompune în două mișcări: în direcția orizontală după axa Ox și în direcția verticală după axa Oy (fig. 3.21). Deoarece forța $\vec{G} = m\vec{g}$ și accelerația respectivă $\vec{g}$ sînt permanent verticale, nu avem forță și accelerație pe direcția orizontală Ox, și mișcarea pe direcția orizontală va fi *uniformă* cu viteza constantă $v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0$. În schimb pe direcția verticală, după axa Oy, avem o mișcare *uniform variată* cu accelerația $-g$ și viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin \alpha_0$:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} = v_0 \cos \alpha_0, \\ x = v_0 t \cos \alpha_0, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin \alpha_0 - gt, \\ y = v_0 t \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} gt^2. \end{cases} \tag{3.31}$$

Scoatem timpul din ecuația lui x: $t = x/v_0 \cos \alpha_0$, și îl introducem în ecuația lui y:

$$y = v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} = x \operatorname{tg} \alpha_0 - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2. \tag{3.32}$$

Aceasta este ecuația explicită a traiectoriei — o *parabolă*, deoar
pătratică de x, de forma $y = Ax + Bx^2$.
Timpul de urcare pînă la înălțimea maximă se obține din condiț
înălțime maximă C: $v_y = 0$, deoarece aici vectorul viteză este
componentă pe axa Oy:

$$v_y = 0 = v_0 \sin \alpha_0 - gt, \text{ de unde } t_u = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

și înălțimea maximă:

$$h = y_m = v_0 t_u \sin \alpha_0 - \frac{1}{2} g t_u^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2g},$$

adică obținem formulele cunoscute pentru timpul de urcare și
la aruncarea verticală (3.26), dar cu viteza inițială $v_{0y} = v_0 \sin$
În timpul de urcare t_u deplasarea pe orizontală va fi

$$x_m = v_0 t_u \cos \alpha_0 = \frac{1}{g} v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0.$$

Distanța maximă pe orizontală OA (fig. 3.21), numită *bătaia* (p

$$b = 2x_m = \frac{1}{g} v_0^2\, 2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = \frac{1}{g} v_0^2 \sin 2$$

unde am folosit o formulă din trigonometrie: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha$ c
Dacă se aruncă corpurile cu aceeași viteză inițială v_0 dar sub
de orizontală, bătaia maximă va fi sub unghiul α_m pentru care
deci $2\alpha_m = 90°$, de unde $\alpha_m = 45°$.

5.* Să se studieze aruncarea pe orizontală a unui corp (în vid).

Rezolvare. Alegem axele de coordonate ca în figura 3.22, unde
care se aruncă corpul. Se vede imediat că traiectoria coincide
tatea dreaptă a parabolei de la problema precedentă (dacă mut
ea să treacă prin vîrful C). Asemănător problemei precedente a

$$\begin{cases} v_x = v_0 = \text{const}, \\ x = v_0 t, \end{cases} \quad \begin{cases} v_y = -gt, \\ y = h - \frac{1}{2} gt^2. \end{cases}$$

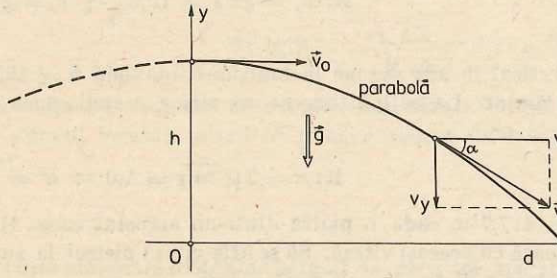


Fig. 3.22. Aruncarea orizontală a unui corp în c
gravitațional terestru. (Problema rezolvată

Din aceste ecuații rezultă imediat: ecuația traiectoriei, timpul de coborîre (punem condiția $y = 0$), distanța parcursă pe orizontală și viteza finală v':

$$t = \frac{x}{v_0}; \quad y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2} \quad \text{(parabolă)}; \tag{3.38}$$

$$y = 0; \; t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad d = v_0 t_c = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}, \tag{3.39}$$

$$v' = \sqrt{v_x'^2 + v_y'^2} = \sqrt{v_0^2 + (-gt_c)^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}. \tag{3.40}$$

Observăm că ecuațiile (3.24) și (3.25) de la mișcarea pe verticală, cît și ecuațiile (3.31) de la aruncarea oblică sau (3.37) de la aruncarea orizontală se obțin imediat prin proiectarea pe cele două axe Ox, Oy a ecuațiilor *vectoriale* (3.17—3.18) (cu $\vec{a} = \vec{g}$):

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0); \; \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2} \vec{g} (t - t_0)^2 \tag{3.41}$$

și ținînd seama, bineînțeles, că $\vec{g}$ are proiecția zero pe Ox.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 1{,}1$ km și parcurge astfel o distanță $h' = 314$ m, după care își continuă mișcarea uniform pînă la atingerea Pămîntului. Să se afle durata mișcării.

R: $t = \dfrac{h + h'}{\sqrt{2gh'}} = 18$ s.

2. Un corp aruncat vertical în sus are la înălțimea h_1 viteza v_1. Să se afle viteza inițială v_0.

R: $v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gh_1}$.

3. Considerînd că o săritură de la înălțimea $h \approx 1$ m pe Pămînt nu este periculoasă, să se calculeze înălțimea corespunzătoare pe Lună ($g = 1{,}62$ m/s^2).

R: $h' = h\, g_P / g_L \approx 6$ m (2 etaje!).

4. Un corp aruncat vertical în sus a revenit pe pămînt după un timp $\tau = 4$ s. Să se afle viteza inițială a corpului și înălțimea la care s-a ridicat corpul.

R: $v_0 = g\tau/2 = 19{,}6 \dfrac{\text{m}}{\text{s}}$; $h = g\tau^2/8 = 19{,}6$ m.

5. Un corp aruncat vertical în sus ajunge la înălțimea maximă $h = 19{,}6$ m. După cît timp revine el pe Pămînt? La ce înălțime se va ridica corpul dacă viteza inițială este mărită de $n = 3$ ori?

R: $\tau = 2\sqrt{2h/g} = 4{,}0$ s; $h' = n^2 h = 176{,}4$ m.

6. De la înălțimea $h = 117{,}7$ m cade o piatră dintr-un aerostat care: 1) urcă cu viteza $v_0 = 9{,}8$ m/s; 2) coboară cu aceeași viteză. Să se afle viteza pietrei la suprafața Pămîntului și durata de cădere a pietrei în cele două cazuri.

R: $v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 49$ m/s; $t' = \dfrac{v' \pm v_0}{g} = 6{,}0$ și $4{,}0$ s.

7. Să se afle înălțimea h de la care cade liber un corp și durata că în intervalul de timp $\tau = 1{,}0$ s înainte de atingerea Păm fracțiune $k = 0{,}19$ din înălțimea totală de la care cade.

R: $T = \tau \dfrac{1 + \sqrt{1 - k}}{k} = 10$

8. De la înălțimea $h = 225$ m, pe o planetă oarecare, cad liber altul; al doilea începe să cadă în momentul cînd primul a afle distanța dintre corpuri în momentul cînd primul cor planetei.

R: $d =$

9. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu aceeași vitez și la un interval $\tau = 2{,}0$ s unul după altul. După cît timp reprezinte grafic coordonatele în funcție de timp.

R:

10. Un corp cade liber de la o înălțime $h = 10$ m. În același m aruncat vertical în jos de la o înălțime $H = 20$ m. Să se afle lui 2, dacă ambele corpuri au căzut simultan pe pămînt.

R: $v_0 =$

11.* Cum se schimbă durata și distanța orizontală de căder orizontal, dacă viteza de aruncare crește de n ori?

R: nu se sc

12.* Un corp este aruncat orizontal cu viteza $v_0 = 10$ m/s. D aruncat, dacă această înălțime este egală cu distanța orizo $= 10$ m/s^2.)

13.* Un corp aruncat orizontal își mărește viteza de n ori după u mișcării. Care este viteza inițială v_0 a corpului?

14.* Un avion zboară orizontal la înălțimea h cu viteza constan să arunce o bombă asupra unei ținte. Să se afle: unghiul β țintă și verticală în momentul aruncării bombei, pentru ca distanța d pe orizontală pînă la țintă în acel moment. Unde s mentul cînd bomba atinge ținta?

R: $\operatorname{tg} \beta = v_0 \sqrt{\dfrac{2}{gh}}$; $d = v_0$

15.* Doi copii se joacă cu mingea aruncînd-o unul altuia. Ce înă mingea în timpul jocului, știind că mingea zboară de la u $\tau = 2{,}0$ s?

16*. De cîte ori este mai mare distanța (bătaia) la care un sporti pe Lună față de Pămînt? (Accelerația gravitațională pe Lună

R:

17.* Cu ce viteză inițială v_0 trebuie lansată o rachetă sub un unghi $\alpha = 45°$ față de orizontală, pentru ca să explodeze la înălțimea maximă a traiectoriei sale, știind că timpul de ardere a fitilului este $\tau = 6$ s?

R: $v_0 = \dfrac{g\tau}{\sin \alpha} = 82$ m/s.

18.* De pe puntea unui vapor care merge cu viteza constantă v_x se trage un obuz vertical în sus cu viteza v_y. Să se afle ecuația traiectoriei obuzului față de Pământ. Unde va cădea obuzul?

R: $y = \dfrac{v_y}{v_x} x - \dfrac{g}{2v_x^2} x^2$; pe vapor.

19.* Un vînător ochește vîrful unui turn de înălțime $h = 20$ m. La ce distanță d de turn trebuie să tragă pentru ca glonțul care iese cu viteza inițială $v_0 = 250$ m/s să lovească baza turnului?

R: $d = \sqrt{h(2v_0^2/g - h)} = 505$ m.

20. Cu ce forță orizontală trebuie apăsat un corp de greutate $G = 10{,}0$ N, așezat pe un plan înclinat fără frecări, de unghi $\alpha = 60°$, pentru ca acest corp să nu lunece?

R: $F = G \operatorname{tg} \alpha = 17{,}3$ N.

21. Pe un plan înclinat neted, fără frecări, de unghi $\alpha = 30°$ față de orizontală, este așezat un corp de masă $m = 2{,}0$ kg, legat printr-un fir de un alt corp de masă $M = 3{,}0$ kg.
Firul este întins paralel cu planul și trecut peste un scripete ideal din creștetul planului, ca în figura 3.23. Să se afle accelerația cu care se mișcă corpurile.

R: $T - Mg = Ma$; $mg \sin \alpha - T = ma$, $N - mg \cos \alpha = 0$,

de unde

$$a = g \frac{m \sin \alpha - M}{m + M} = -3{,}92 \text{ m/s}^2; \quad T = mMg \frac{1 + \sin \alpha}{m + M} = 176{,}4 \text{ N}.$$

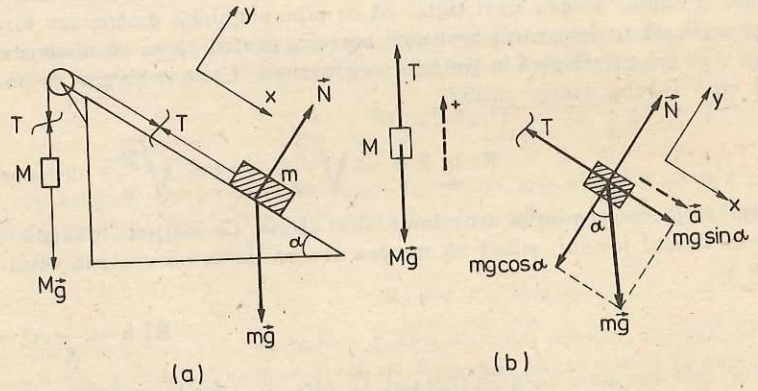


Fig. 3.23. La problema 21.

3.4.1. **Forțele de frecare la alunecare între solide.** cu o viteză inițială v_0 de-a lungul unui plan orizontal (o mișcare *încetinită* de lunecare și pînă la urmă se v această mișcare încetinită? Deoarece viteza se micșorea este opus vectorului viteză, deci și forța rezultantă tr torului viteză. Greutatea corpului este orientată vertica (echilibrată) de reacțiunea normală a planului. Corpu direcția verticală. Prin urmare trebuie să existe o for acțiune între corp și plan. Aceasta este *forța de fre* întrepătrunderii asperităților și neregularităților m două suprafețe care lunecă una față de cealaltă. P orizontală încetinită se datorește forței de frecare, exe corpului. Această *forță de frecare este conținută în pl* îndreptată în sens opus vitezei corpului (fig. 3.24). Des tact există două forțe de frecare, acțiunea și reacțiun de sensuri opuse, una acționează asupra corpului, iar ce

Pentru a menține corpul în mișcare *uniformă* de aplicăm o forță de tracțiune (sau de împingere) *egală* în cu forța de frecare, de exemplu, o sanie în mișcare u de cal.

Pentru a deplasa un obiect pe podea, de exemplu o masă, trebuie să împingem corpul cu o anumită f pentru a-l urni din loc, adică pentru a învinge înțepeni de repaus. Dar, odată corpul pornit, este necesară o for menține în mișcarea de alunecare pe podea. Dacă dula plin (încărcat) aceste forțe sînt mai mari, decît în cazul derul este gol.

Ori de cîte ori un corp *alunecă* peste alt corp, în pla alunecării), apar *forțe de frecare conținute în acest pla opus vitezei relative a corpului* considerat, față de celălalt corp. Forțele de frecare frînează totdeauna mișcarea relativă a corpurilor care alunecă.

3.4.2. **Legile frecării.** *Experiment.* Să punem pe o scîndură fixă o placă paralelipipedică dintr-un material oarecare (lemn, plastic, metal) prevăzută cu un cîrlig. Pe placă se pot pune diferite etaloane de masă, iar de cîrlig putem trage orizontal printr-un dinamometru

Fig. 3.24. Fo necării unui

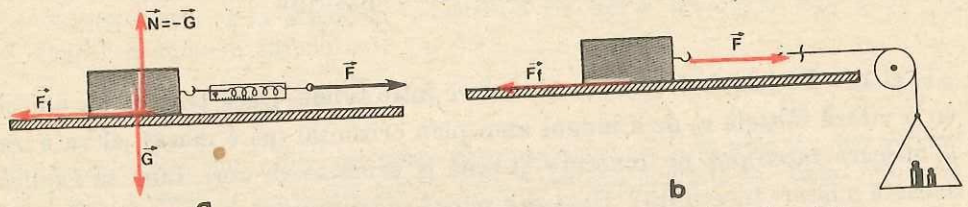


Fig. 3.25. Studiul legilor frecării la alunecare pe un plan orizontal.

sau putem lega un fir, întins orizontal și trecut peste un scripete. La capătul firului se leagă un platan pe care putem pune diferite etaloane de masă (fig. 3.25).

Dacă tragem încet de dinamometru sau adăugăm treptat etaloane de masă pe taler, constatăm că la început placa nu pornește. Cum greutatea plăcii este echilibrată de reacțiunea normală a scîndurii și în plus aceste forțe sînt verticale, ele nu pot echilibra forța de tracțiune exercitată de fir. Această forță de tracțiune este echilibrată de *forța de frecare* care ia naștere în planul de contact.

Prin urmare, *chiar înainte de a începe alunecarea apar forțe de frecare între solide*, numite *forțe de frecare statică* sau de *aderență*.

Dacă mărim treptat forța de tracțiune, fie trăgînd de dinamometru (fig. 3.25, *a*), fie adăugînd etaloane de masă pe platan (fig. 3.25, *b*), constatăm că la un moment dat, pentru o anumită forță de tracțiune F_s corpul pornește. Forța F_s este egală cu *forța maximă de frecare statică* (de aderență). Odată mișcarea începută, dacă menținem *aceeași* forță de tracțiune F_s, corpul se mișcă *accelerat*. Reducînd însă ulterior, convenabil, forța de tracțiune, este posibil să se obțină o mișcare *uniformă* a corpului (cu diferite viteze constante), pentru o *anumită* forță de tracțiune F_c mai mică decît F_s (fig. 3.26). Forța F_c este egală cu *forța de frecare la alunecare* (forță de frecare cinetică). (Cu F_f vom nota forța de frecare în general.)

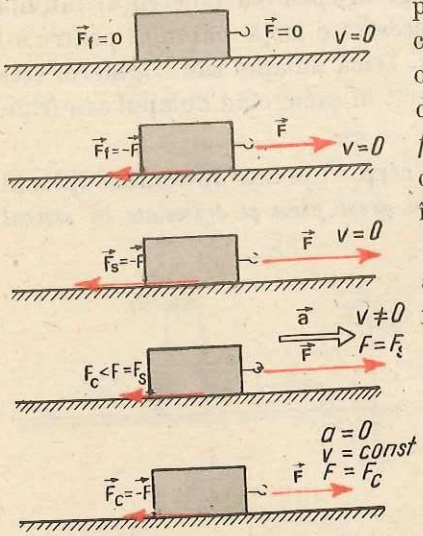


Fig. 3.26. Forțele de frecare statică (aderență) și forțele de frecare la

Pentru a măsura forța de frecare de alunecare F_c încărcăm treptat platanul cu mici etaloane de masă și de fiecare dată ciocănim ușor scîndura pentru a imprima mici impulsuri corpului. Cît timp forța de tracțiune (tensiunea din fir), egală cu greutatea platanului și a etaloanelor de masă, este mai mică decît forța de frecare la alunecare F_c, micile impulsuri imprimate corpului prin ciocănirea scîndurii *se sting* și corpul nu va aluneca pe scîndură. Dar în momentul

cînd forța de tracțiune atinge valoarea F_c, corpul *o dată* scîndurii) își va menține mișcarea de alunecare, practi forța de tracțiune va fi echilibrată de forța de freca

Aparatul cu ajutorul căruia se studiază legile frecă *metru*. El este format dintr-o scîndură care poate fi fi poate înclina treptat și care are la un capăt un mic sc neglijabile. Aparatul mai are trei sau patru corpuri pa (de obicei din lemn, dar avînd fixate pe fețele laterale pl plastic, metal, sticlă), prevăzute cu cîrlige pentru a p ele sau legate printr-un fir. Cu acest aparat se lucrează plan orizontal (fig. 3.25, *b*) și ca plan înclinat (fig. 3.28) numai forțele de frecare *la alunecare* F_c.

În prima variantă, ca în figura 3.25, măsurăm f menținerea unei mișcări uniforme de alunecare, adică *alunecare* F_c (prin ciocănirea ușoară a scîndurii).

Punînd corpul paralelipipedic pe diferite fețe (d constatăm experimental că forțele măsurate F_c sînt de deși corpul se sprijină de fiecare dată cu suprafețe de a punînd trei corpuri identice unul *peste* altul sau legînd (fig. 3.27), pe o față sau pe alta (cu același material), găs de frecare F_c, deși aria suprafeței de contact s-a schim însă greutatea *sistemului* a fost aceeași. De aici deducem

forța de frecare la alunecare F_c între două corpur suprafeței de contact dintre corpuri.

Punînd peste corpul studiat diferite etaloane de ma mental că forțele de frecare cresc și anume:

forța de frecare la alunecare F_c este proporțională n o r m a l ă exercitată pe suprafața de contact.

Notînd cu N forța normală de apăsare pe suprafa corpuri (în cazul experienței descrise N este egal cu gr etaloanelor de masă puse peste corp) și cu μ coeficientul putem scrie deci

$$F_c = \mu N.$$

Coeficientul μ se numește *coeficient de frecare la alunecar*

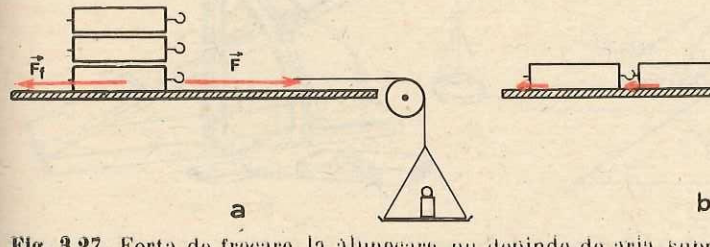


Fig. 3.27. Forța de frecare la alunecare nu depinde de aria supr corpuri.

Repetînd experienţele descrise cu alte materiale, constatăm că într-adevăr coeficientul de frecare μ nu depinde de aria suprafeţei de contact dintre cele două corpuri (nelubrifiate), dar depinde de natura corpurilor şi de felul prelucrării suprafeţelor în contact (gradul de şlefuire sau contaminare cu oxizi sau alte substanţe).

De asemenea, experienţa arată că μ este practic independent de viteza relativă de alunecare a corpului (scade mai întîi puţin cu creşterea vitezei, ca apoi să crească iarăşi, puţin, cu viteza).

Aceleaşi legi ale frecării se obţin în varianta experimentală cu planul înclinat. Punem corpul pe scîndura tribometrului şi înclinăm (ridicînd) *treptat* scîndura pînă cînd la un moment dat, pentru un anumit unghi α de înclinare corpul porneşte. În acest moment componenta greutăţii $G \sin \alpha$ învinge forţa maximă de frecare statică (de aderenţă) F_s (fig. 3.28). O dată corpul pornit, dacă nu micşorăm unghiul, corpul va aluneca în jos accelerat, deoarece forţa de frecare cinetică (de alunecare) F_c este mai mică decît ceă de frecare statică, $F_c < F_s$. Reluînd experienţa dar ciocănind uşor scîndura putem găsi un unghi φ (mai mic decît cel precedent) pentru care corpul o dată pornit va luneca în jos practic *uniform*. În acest caz $G \sin \varphi = F_c$.

Exact ca în experienţa cu scîndura orizontală, punînd corpul pe diferite feţe sau combinînd mai multe corpuri identice, găsim că unghiul φ, numit *unghi de frecare*, este de fiecare dată acelaşi, adică nu depinde de aria suprafeţei de contact (legea I). Punînd peste corp diferite etaloane de masă găsim că forţa F_c este proporţională cu apăsarea normală pe planul înclinat, care este $G \cos \varphi$ (legea II). Coeficientul de frecare rezultă imediat din această experienţă:

$$\mu = \frac{F_c}{N} = \frac{G \sin \varphi}{G \cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi. \qquad (3.43)$$

Coeficientul de frecare la alunecare μ este egal cu tangenta unghiului de frecare φ, care la rîndul lui este egal cu unghiul planului înclinat pentru care corpul lunecă *uniform* pe plan.

Coeficientul de frecare, fiind un raport de forţe, este *adimensional* (număr fără dimensiuni fizice, adică fără unităţi de măsură).

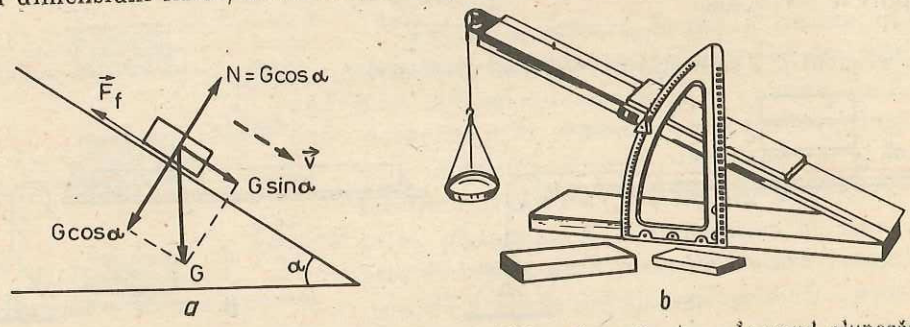


Fig. 3.28. Forţa de frecare pe planul înclinat. La echilibru $F_f = G \cdot \sin \alpha$. În cazul alunecării uniforme: $F_c = G \sin \varphi$ şi $F_c = \mu N = \mu G \cos \varphi$, de unde $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ (φ — unghiul de frecare).

Exemple de coeficienţi de frecare la alunecare

Piele pe metal	0,6	Piele pe f
Cărămidă pe cărămidă	0,5—0,7	Oţel pe oţ
Lemn pe lemn	0,2—0,6	Lemn pe
Cauciuc pe şosea asfaltată	0,4—0,6	Oţel pe g
Piele pe lemn	0,40	

Cele două legi ale frecării au fost descoperite experim
DA VINCI (1452—1519) şi redescoperite în 1699 d
G. AMONTONS. Ulterior savantul francez CHARLES A
1806) a efectuat multe experienţe asupra frecării şi a
dintre frecarea statică şi cea cinetică. În cinstea lui cel
numele.

Explicaţia legilor frecării rezultă din analiza micros
în contact. Oricît de şlefuite ar fi suprafeţele, ele prezintă
larităţi sau asperităţi microscopice. Atunci aria *reală* a c
mai mică decît aria aparentă macroscopică (poate fi de
mică) (fig. 3.29). Această arie reală de contact este propo
normală, deoarece vîrfurile neregularităţilor, dacă sînt
sporită, se deformează plastic (presiunea este foarte m
mici) şi aria de contact creşte practic proporţional. În ca
contacte-suduri dintre suprafeţe sînt rupte şi se form
noi.

Prin urmare, forţa de frecare este în realitate propor
a suprafeţelor microscopice de contact, care este indepe
rentă macroscopică de contact, dar care este proporţion
mală. Rezultă că forţa de frecare este proporţională cu
dar este independentă de aria aparentă macroscopică d

3.4.3. **Frecarea în natură şi în tehnică.** Forţele de
dintre solide apar peste tot în natură şi în tehnică. În un
utile, chiar indispensabile, iar în alte domenii sînt dăunăt
cît mai mult.

Astfel, echilibrul corpurilor pe suprafeţe uşor înclinat
datorită forţelor de frecare. Însuşi mersul oamenilor este
ţelor de frecare dintre talpa încălţămintei şi teren. La fe
este posibil datorită forţelor de frecare dintre periferia ro

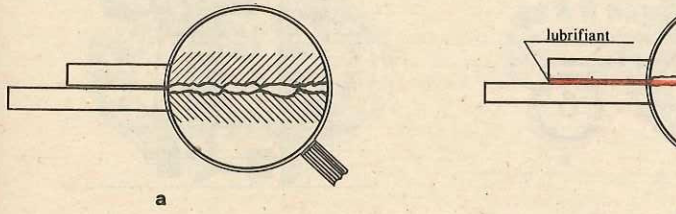


Fig. 3.29. Contactul microscopic între solide şi rolul lu

nate de motor) și teren. Pe gheață sau polei mersul este foarte greoi (la vehicule roțile patinează, adică se învîrtesc pe loc).

Trebuie observat că la roțile *motoare* (acționate de motor) ale vehiculelor, forța de frecare asupra roții este orientată *înainte* (roata împinge Pămîntul înapoi și Pămîntul împinge roata înainte, așa cum se vede clar în cazul patinării roții). Această *forță de frecare* reprezintă tocmai *forța de tracțiune* dezvoltată de motor. La fel în cazul mersului oamenilor forța de frecare asupra tălpii acționează *înainte:* noi împingem Pămîntul înapoi și Pămîntul ne împinge înainte.

Frînarea vehiculelor este posibilă tot datorită forțelor de frecare (între saboți și discul roții, între roți și șosea). Pentru o frînare eficientă a vehiculului nu trebuie să intrăm în regimul de alunecare a roților pe șosea, frînînd prea brusc pe teren lunecos sau blocînd roțile, ci să menținem rostogolirea roților în preajma alunecării, cînd forța de aderență este mai mare decît forța de frecare la alunecare.

Transmiterea mișcării de rotație prin curele de transmisie este posibilă datorită forțelor de frecare dintre curea și periferia roții (fig. 3.30 și fig. 3.31).

Legarea nodurilor la sforile pentru ambalarea mărfurilor; ținerea la mal a unui vas care acostează prin înfășurarea funiei de amaraj de mai multe ori în jurul bornei cilindrice fixate pe țărm; ținerea cu degetele mîini a diferitelor obiecte (creion, unelte) — toate sînt posibile numai datorită forțelor de frecare.

Pe de altă parte forțele de frecare sînt dăunătoare în diferite motoare și mecanisme, deoarece pentru învingerea lor se consumă energie în plus, în mod inutil, energie care se transformă în căldură, ducînd la încălzirea pieselor în mișcare. Uneori această încălzire poate duce la deformarea pieselor, la gripa-rea lor sau chiar la topirea lor.

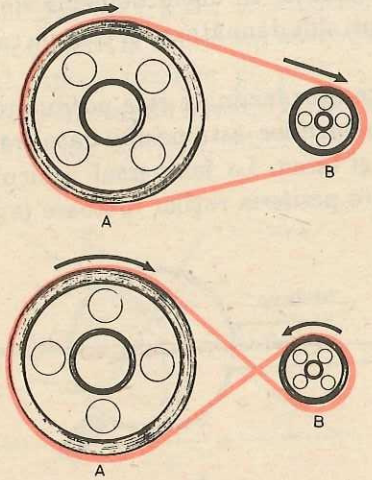


Fig. 3.30. Curele de transmisie.

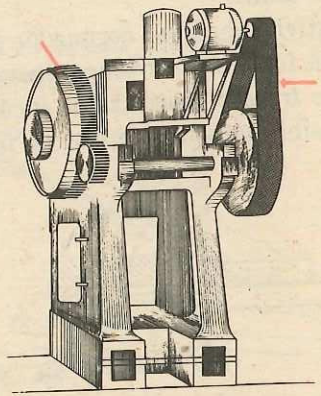


Fig. 3.31. Transmisie prin roți dințate și prin curea.

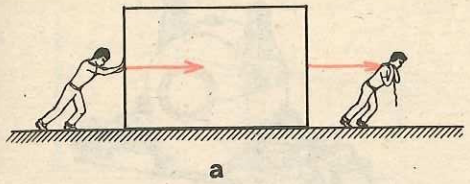


Fig. 3.32. Frecarea la alunecare și frecarea la ro

Pentru a micșora forțele de frecare la lunecare uleiuri și unsori. Acestea formează o peliculă care separ la lunecarea pe o pătură de lichid, la care forțele de fre mai mici.

O altă cale este folosirea *rostogolirii* în locul lune care se opune deplasării unui corp care se rostogolește mai mică (de sute de ori) decît forța de frecare la alun cilindru (creion rotund) pus de-a lungul unui plan, în repaus, dar pus de-a curmezișul planului (pantei) sigu la înclinări mici ale planului.

La rostogolire asperitățile sînt mai degrabă „ne decît rupte ca în cazul lunecării.

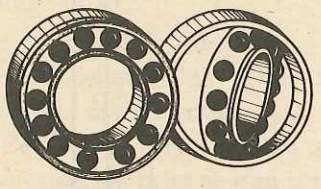
Pentru a deplasa un bloc greu se pun sub el butuc procedeu cunoscut cu mult înaintea erei noastre, de exe la construcția piramidelor.

Descoperirea roții a marcat un important progres

Pentru a reduce frecările în lagăre, în care se rot folosesc *rulmenți* cu bile sau cu role (fig. 3.33, 3.34, 3 carea de alunecare din lagăre în frecarea de rostogoli

Forța de frecare la rostogolire se poate măsura în forța de frecare la lunecare (cu tribometrul).

Astăzi există vehicule pe *pernă de aer* în care mo o pătură de aer sub vehicul, pe care acesta lunecă. D mentează vehicule cu suspensie *magnetică* care se depl șine speciale, fiind menținute în suspensie cu ajutor



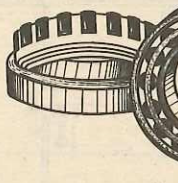


Fig. 3.33. a) Rulmenți cu bile și b) rulmenți

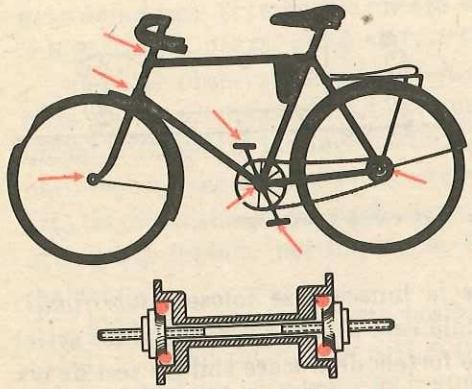


Fig. 3.34. Rulmenți cu bile la o bicicletă.

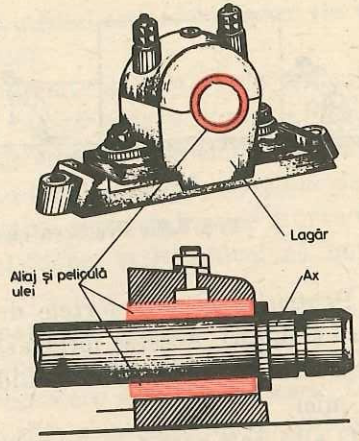


Fig. 3.35. Lagăr de alunecare (fără rulmenți).

În afară de frecarea între solide, există forțe de frecare între solide și fluide sau între straturi de fluid. Astfel, orice corp care se mișcă într-un fluid întîmpină din partea acestuia o forță de rezistență, de exemplu la vapoare, submarine, vehicule terestre, avioane, rachete.

EXPERIMENTE

Studiul frecării la alunecare. (Trusă de fizică pentru liceu.) Se analizează frecarea de alunecare dintre cărucior (cu roțile blocate) și bara de rulare. Pentru aceasta se realizează montajul din figura 3.36 (detalii în fig. 1.29). Se blochează roțile căruciorului (fig. 3.37) pentru a realiza frecarea de alunecare.

a) Metoda planului orizontal. Se încarcă căruciorul cu greutăți cu șurub de 100 g. Forța de tracțiune se alege prin încercări astfel încît căruciorul cu roțile blocate să lunece *uniform* după ce a fost pus în mișcare. Atunci forța de tracțiune F echilibrează forța de frecare la lunecare F_c și $\mu = F_c/N = F/G$.

Se fac mai multe determinări pentru încărcări diferite ale căruciorului și se calculează μ. În limitele erorilor experimentale se obține același coeficient μ.

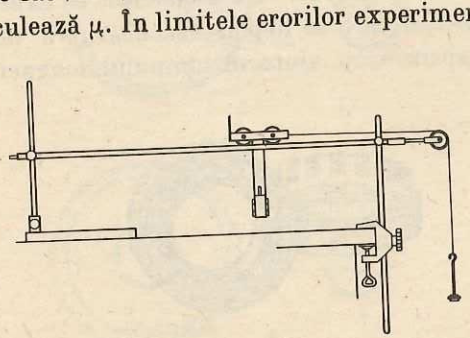


Fig. 3.36. Montaj pentru studiul frecării pe plan orizontal.

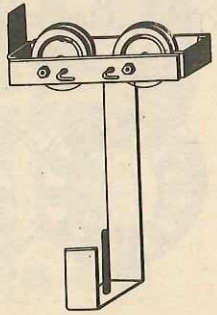


Fig. 3.37. Blocarea roților căruciorului.

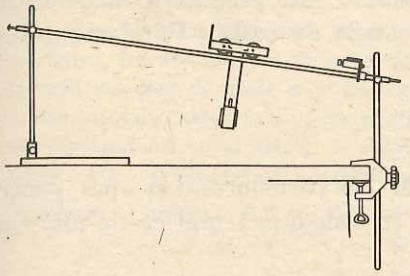


Fig. 3.38. Montaj pentru studiul frecării pe plan înclinat.

Fig. 3. greuta

b) Metoda planului înclinat. Se utilizează planul electric (fig. 3.38). Pe acesta se lasă să lunece căruc Forța care pune în mișcare căruciorul este component ții acestuia (fig. 3.39). În mișcare *uniformă*, cu unghiu frecare $F_c = \mu N = \mu G_n = \mu mg \cos \varphi$ este echilibra gențială $G_t = mg \sin \varphi$ astfel încît $\mu = \operatorname{tg} \varphi$ (φ — ung

Se lasă căruciorul să lunece pe bara de rulare și înclinare α al acesteia pînă se obține o mișcare *uniform* Se măsoară unghiul φ cu raportorul (*17*). Se repetă e și se ia media valorilor μ. Se va compara cu valoare precedentă.

2. *Determinarea randamentului planului înclinat.* un corp pe un plan înclinat de lungime l și înălțime h efectuăm lucrul mecanic $L_u = G \sin \alpha \cdot l = Gh$, la directă pe verticală. În prezența frecărilor: $L_t = (G \sin$ deci ridicarea corpului se face cu randamentul

$$\eta = \frac{L_u}{L_t} = \frac{mgh}{mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)l} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}$$

Cu cît unghiul α este mai mare (deci tg α mai mare), c dar și forța necesară este mai mare. La unghiuri α mic mic dar în schimb și forța necesară este mai mică.

Se realizează montajul din figura 3.40 montat ca plan înclinat (roțile căruciorului sînt blocate). Se încarcă căruciorul cu greutăți cu șurub. Pe taler se pun corpuri cu mase cunoscute M pînă cînd căruciorul se deplasează *uniform în sus* în urma unui impuls. Atunci

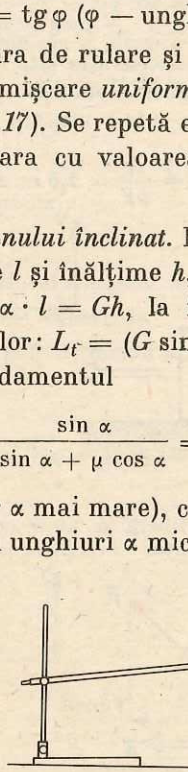


Fig. 3. 40. Monta damentului

$G \sin \alpha + \mu G \cos \alpha = F = (m_t + M)g$, unde G este greutatea căruciorului încărcat, m_t — masa talerului, M — etaloanele de masă. Randamentul se calculează cu formula:

$$\eta = \frac{Gh}{Fl} = \frac{m \sin \alpha}{m_t + M}.$$

Se repetă experiența pentru diferite încărcări ale căruciorului și apoi pentru alte unghiuri de înclinare. Se va compara cu valoarea teoretică de mai sus.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp este lansat de-a lungul unui plan orizontal cu viteza inițială $v_0 = 4{,}9$ m/s. Coeficientul de frecare la alunecare între corp și plan este $\mu = 0{,}20$. Să se afle accelerația corpului, timpul pînă la oprire și distanța parcursă.

Rezolvare. Conform figurii 3.41 avem $\vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{ma}$, care proiectată pe cele două axe dă ecuațiile pe componente:

$$-F_f = ma, \quad N - G = 0,$$

dar, deoarece are loc alunecarea, $F_f = F_c = \mu N = \mu G = \mu mg$, atunci

$$-\mu mg = ma, \quad a = -\mu g.$$

Semnul minus arată că accelerația este îndreptată în sensul opus vitezei (mișcare încetinită). Aplicînd formulele cunoscute pentru timpul pînă la oprire și distanța parcursă pînă la oprire într-o mișcare încetinită, obținem:

$$t_m = -\frac{v_0}{a} = -\frac{v_0}{-\mu g} = \frac{v_0}{\mu g} = 2{,}5 \text{ s}; \quad x_m = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{-2\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g} = 6{,}1 \text{ m}.$$

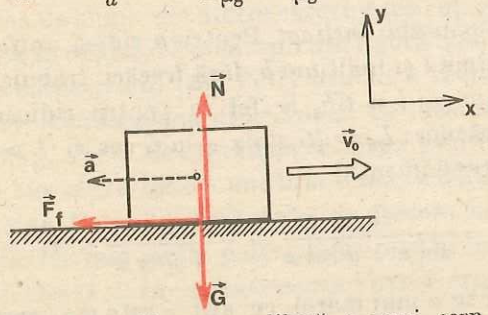


Fig. 3.41. Alunecarea liberă a unui corp pe un plan orizontal cu frecare.

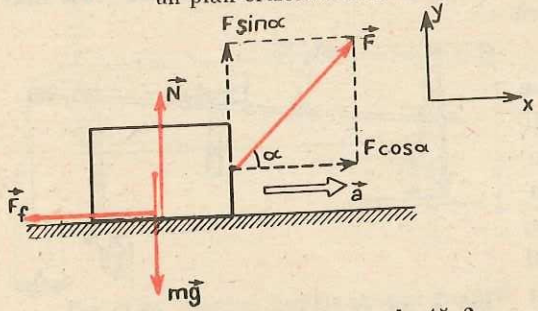


Fig. 3.42. La problema rezolvată 2.

2. Un corp de masă $m = 10{,}0$ kg, așezat pe un plan orizontal, este tras de o forță care formează un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala (fig. 3.42). Să se afle această forță, știind că corpul se mișcă orizontal cu accelerația $a = 1{,}34$ m/s² și coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = 0{,}27$.

Rezolvare. Conform figurii 3.42 avem $\vec{F} + \vec{mg} + \vec{N} + \vec{F}_f = \vec{ma}$, care proiectată pe cele două axe dă ecuațiile:

$F \cos \alpha - F_f = ma$; $F \sin \alpha + N - mg = 0$; dar $F_f = F_c = \mu N = \mu(mg - F \sin \alpha)$,

de unde:

$$F = \frac{m(a + \mu g)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} = 40 \text{ N}.$$

Aici se greșește uneori punînd $F_f = \mu mg$.

3. Un corp de masă $M = 4{,}0$ kg este așezat pe un plan orizontal. De corp este legat un fir întins orizontal, trecut peste un scripete ideal și având la capăt un corp de masă $m = 3{,}0$ kg (fig. 3.43). Coeficientul de frecare la alunecare dintre corpul M și planul orizontal este $\mu = 0{,}25$. Să se afle accelerația sistemului și tensiunea din fir.

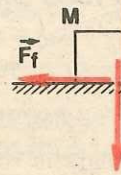


Fig. 3.43

Rezolvare. Conform figurii 3.43 avem:

pentru corpul M: $T - F_f = Ma$, $N - Mg = 0$;

pentru corpul m: $mg - T = ma$.

Dar în cazul lunecării $F_f = F_c = \mu N = \mu Mg$. Rezolvînd a obținem:

$$a = g\frac{m - \mu M}{m + M} = 2{,}8 \text{ m/s}^2, \quad T = \frac{(1 + \mu)mMg}{m + M}$$

4. Să se studieze lunecarea liberă a unui corp pe un plan înclina

Rezolvare. a) *Corpul lunecă liber în jos* (fără viteză inițială). Cor

$$mg \sin \alpha - F_f = ma, \qquad N - mg \cos \alpha$$

dar în cazul lunecării $F_f = F_c = \mu N = \mu mg \cos \alpha$, atunci

$$mg \sin \alpha - \mu\, mg \cos \alpha = ma, \qquad a_c = g(\sin \alpha$$

Pentru ca corpul *să lunece* trebuie ca:

$$a > 0, \sin \alpha > \mu \cos \alpha \text{ sau } \mu < \text{tg}$$

altfel corpul rămîne în repaus pe planul înclinat.

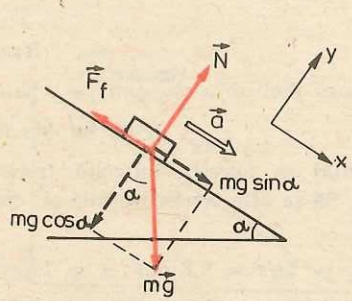
Cazuri particulare:

$\alpha = 0$, plan orizontal, $a = -\mu g$, adică rezultatul cunoscut de

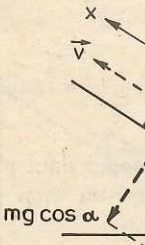
$\alpha = 90°$, căderea liberă, $a = g$ (rezultat bine cunoscut).

Cunoscînd accelerația la coborîre a_c (3.44), putem calcula tir finală:

$$t_c = \sqrt{\frac{2s}{a_c}} = \sqrt{\frac{2s}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}; \quad v' = \sqrt{2a_c s} = \sqrt{2g(\sin$$



(a) coborîre



(b) u

Fig. 3.44. Mișcarea pe plan înclinat cu frecare. La prob

b) Lansăm corpul cu o viteză inițială v_0 în sus de-a lungul planului înclinat. Conform figurii 3.44, *b* avem:

$$-mg\sin\alpha - F_f = ma, \qquad N - mg\cos\alpha = 0,$$
$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha, \qquad a_u = -g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha). \tag{3.47}$$

Accelerația este îndreptată în sensul opus vitezei (mișcare încetinită).

Cazuri particulare:

$\alpha = 0$, plan orizontal, $a = -\mu g$, rezultat cunoscut;

$\alpha = 90°$, aruncare vertical în sus, $a = -g$, iarăși rezultat cunoscut.

Cunoscînd accelerația de urcare (3.47), putem calcula timpul de urcare și distanța parcursă:

$$t_u = -\frac{v_0}{a_u} = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}; \quad s_m = -\frac{v_0^2}{2a_u} = \frac{v_0^2}{2g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}. \tag{3.48}$$

După oprire, corpul rămîne în repaus, blocat pe planul înclinat dacă $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, și lunecă înapoi dacă $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ (3.45). În ultimul caz, timpul de coborîre înapoi la baza planului este mai mare decît timpul de urcare, și viteza finală v' cu care corpul ajunge înapoi la baza planului este mai mică decît viteza de lansare v_0:

$$t_c = \sqrt{\frac{2s_m}{a_c}} = \frac{v_0}{g}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}} = t_u\sqrt{\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} =$$
$$= t_u\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha + \mu}{\operatorname{tg}\alpha - \mu}} > t_u; \tag{3.49}$$

$$v' = \sqrt{2a_c s_m} = v_0\sqrt{\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}} = v_0\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\alpha - \mu}{\operatorname{tg}\alpha + \mu}} < v_0. \tag{3.50}$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. De ce locomotivele se fac grele din oțel și nu ușoare din aluminiu (sau duraluminiu)?

R: forța de tracțiune este forța de frecare la roțile motoare ($F_{f.max} = \mu G$).

2. Care este condiția ca un corp, lansat în sus de-a lungul unui plan înclinat să rămînă pe loc după oprire?

R: $\mu > \operatorname{tg}\alpha$.

3. Este posibil ca un vagon (sau sanie) să coboare rectiliniu *uniform* pe o pantă lină?

R: da (dacă $\alpha = \varphi$).

4. Un corp lansat de-a lungul unui plan orizontal se oprește datorită frecării pe o distanță $d = 19{,}6$ m într-un timp $\tau = 4{,}0$ s. Să se afle viteza inițială și coeficientul de fr re la lunecare.

R: $v_0 = 2d/\tau = 9{,}8$ m/s; $\mu = 2d/g\tau^2 = 0{,}25$.

5. Un tren frînează cu o forță de $n = 10$ ori mai mică decît greutatea sa. Știind viteza inițială $v_0 = 108$ km/h, să se afle timpul pînă la oprire și distanța parcursă.

R: $t_m = nv_0/g = 31$ s; $d = nv_0^2/2g = 460$ m.

6. Un camion cu masa $m = 5{,}0$ t pornește cu accelerația a forțele de frecare (rezistență) reprezintă o fracțiune $f = 0{,}0$ nului, să se afle forța de tracțiune dezvoltată de motor.

R: F

7. Un tren cu masa $m = 1\,000$ t își mărește viteza de la $v_1 = 5$ într-un timp $\Delta t = 1$ min 40 s. Știind forța de tracțiune a să se afle forța de rezistență.

R: $F_r =$

8. Pentru a evita o ciocnire un șofer a frînat brusc, la maxim urmelor lăsate de anvelope pe asfalt s-a găsit lungimea de coeficientul de frecare pe asfalt $\mu = 0{,}60$, să se afle dacă ș maximă legală $v_{max} = 60$ km/h.

R: $v_0 = \sqrt{2\mu g}$

9. Un corp cade liber în aer de la o înălțime $h = 14{,}7$ m într fracțiune din greutatea sa reprezintă forța de rezistență m din partea aerului?

R: F_r

10. Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat de aplicată o forță minimă în sus de-a lungul planului $F_1 = 3$, uniform în sus de-a lungul planului trebuie o forță în sus $F_2 = 6{,}5$ N.

Să se afle coeficientul de frecare la lunecare (fig. 3.45).

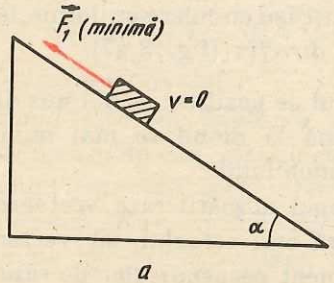
R: μ

11. O săniuță lunecă pe zăpadă pe un drum înclinat de unghi $h = 2{,}0$ m, după care intră pe un drum orizontal, oprindu-s frecării pe zăpadă. Coeficientul de frecare la lunecare pe z afle distanța parcursă pe planul orizontal.

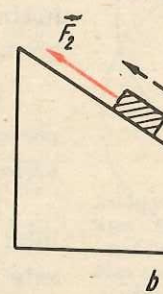
R: $d = h$

12. O săniuță lansată în sus de-a lungul unui plan înclinat, $\alpha = 45°$ cu orizontala, revine înapoi la baza planului astfel este de $n = 1{,}1$ ori mai mare decît timpul de urcare. Care est la lunecare între săniuță și planul înclinat?

R: $\mu = \operatorname{tg}\alpha(n$



a



b

Fig. 3.45. La problema 10.

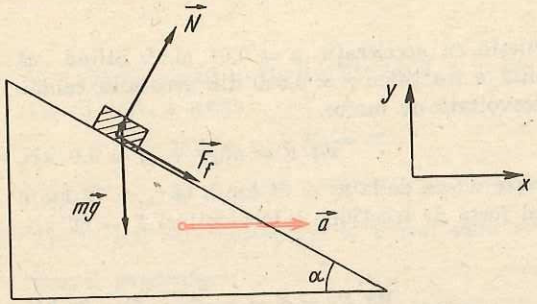


Fig. 3.46. La problema 14.

13. O săniuță de greutate $G = 0{,}50$ kN lunecă liber în jos pe o pantă $p = 4\%$ cu viteză *constantă*. Ce forță, paralelă cu planul, este necesară pentru a urca săniuța înapoi cu viteză constantă?

R: $F \simeq 2Gp = 40$ N.

14. Cu ce accelerație orizontală minimă trebuie împins un plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ pentru ca un corp așezat pe el să înceapă să urce pe plan. Coeficientul de frecare dintre corp și planul înclinat este $\mu = 0{,}20$ (fig. 3.46).

R: $N \sin\alpha + F_f \cos\alpha = ma$, $N \cos\alpha - mg - F_f \sin\alpha = 0$,

$$F_f = \mu N, \text{ de unde } a = g\frac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \mu \operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{2}g.$$

3.5. MIȘCAREA CIRCULARĂ UNIFORMĂ

Cea mai simplă și una din cele mai răspîndite și mai importante mișcări curbilinii este *mișcarea circulară*. În mișcarea circulară traiectoria punctului material este un *cerc*.

În structura diferitelor mecanisme, motoare, mașini-unelte intră tot felul de roți și osii ale căror particule descriu cercuri în jurul axei de rotație, deci au o mișcare circulară.

Să legăm o piatră de o sfoară și s-o învîrtim deasupra capului astfel încît să descrie un cerc orizontal. Piatra va avea o mișcare circulară.

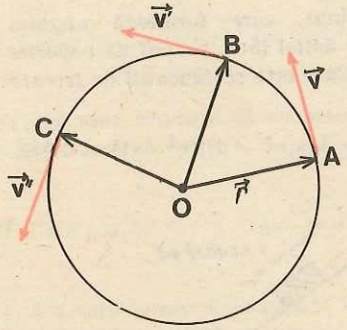


Fig. 3.47. În mișcarea circulară uniformă vectorul viteză este constant în modul, dar își schimbă mereu *direcția*, deoarece este tangent la cerc sau perpendicular pe raza vectoare a mobilului.

Mișcarea circulară este *uniformă* dacă viteza mobilului este *constantă în modul*, adică mobilul descrie arce de cerc egale în intervale de timp egale.

Vectorul viteză, fiind totdeauna tangent la traiectorie, deși rămîne constant în modul în timpul mișcării circulare uniforme, își schimbă permanent *direcția* (fig. 3.47).

Vectorul de poziție $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ dus din centrul cercului pînă la mobil se mai numește *raza vectoare* a mobilului.

În timpul mișcării raza vectoare a mobilului mătură aria cercului, iar vectorul viteză este permanent perpendicular pe raza vectoare a mobilului (fig. 3.47).

Mișcarea circulară uniformă este o mișcare *perio* identic după parcurgerea întregului cerc, la interva

Perioada mișcării circulare uniforme este interv mobilul parcurge circumferința cercului.

Perioada T se măsoară în secunde.

O caracteristică a mișcării circulare uniforme, fo tică, este *turația* sau *frecvența de rotație care reprez efectuate în unitatea de timp* (1 s).

Dacă înmulțim durata unei rotații, adică perioad țiilor efectuate în unitatea de timp, adică cu frecvenț unitatea de timp: $T\nu = 1$, de unde rezultă că frec inverse între ele sau reciproce:

$$T\nu = 1, \ \nu = \frac{1}{T}, \ T = \frac{1}{\nu}.$$

Frecvența se măsoară în 1/s sau s^{-1}. În practică turația se măsoară adesea în rot/min (1 rot/s = 60 rot/min).

3.5.1. **Viteza unghiulară.** Poziția mobilului pe cer cu ajutorul coordonatei curbilinii care măsoară lungi la un punct-origine O, considerată pozitivă în sensul t

Fie la momentul inițial $t = t_0$ mobilul în $A_0(s_0)$ și în $A(s)$ (fig. 3.48), atunci mișcarea fiind uniformă pe t mișcării rectilinii uniforme:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \text{const}, \text{ de unde } s = s_0$$

(v va fi negativă în cazul mișcării în sens orar).

Fie θ_0 și θ unghiurile la centru pe care le formează lului cu raza de referință CO ($\theta = 0$) la momentele t_0 $\Delta\theta = \theta - \theta_0$, *măsurat în radiani* , descris de raza ve $= t - t_0$ este legat de arcul subîntins $\Delta s = s - s_0$ prin relația cunoscută din trigonometrie:

$$\Delta s = s - s_0 = R\Delta\theta = R(\theta - \theta_0), \quad (3.53)$$

unde R este raza cercului.

Radianul este un unghi la centru care subîntinde un arc de cerc egal cu raza cercului. Cum unghiul total de 360° subîntinde toată lungimea cercului care cuprinde 2π raze, rezultă că unghiul de 360° are 2π radiani, deci

$$1 \text{ rad} = \frac{360°}{2\pi} = \frac{180°}{\pi} = 57°17'44'',8. \quad (3.54)$$

Fig. 3. unifor $\theta = \theta_0 +$

În fiecare secundă mobilul descrie arce egale, deci și unghiuri la centru egale. O caracteristică unghiulară a mișcării circulare este viteza unghiulară.

Viteza unghiulară reprezintă unghiul la centru descris de raza vectoare în unitatea de timp.

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad [\omega] = 1 \text{ rad/s}. \tag{3.55}$$

Viteza unghiulară se măsoară în *radiani pe secundă* (rad/s).

În mișcarea circulară uniformă $\omega = \text{const}$. Într-o mișcare circulară oarecare (neuniformă) unghiul la centru măturat de raza vectoare, raportat la unitatea de timp, adică viteza unghiulară (momentană), nu este constant, ci variază în timp.

Vom studia numai mișcarea circulară *uniformă*. Din (3.55) rezultă

$$\omega = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}, \quad \theta = \theta_0 + \omega(t - t_0). \tag{3.56}$$

Aceasta este legea mișcării circulare *uniforme* exprimată prin mărimi unghiulare (ω va fi negativ dacă mobilul se mișcă în sens orar).

Împărțind relația (3.53) la Δt, avem

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = R\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = R\omega \rightarrow v = R\omega. \tag{3.57}$$

Aceasta este legătura dintre viteza v (numită și viteză liniară) și viteza unghiulară ω.

În timpul unei perioade T mobilul descrie circumferința cu viteza constantă v, deci

$$vT = 2\pi R, \text{ dar } v = \omega R, \text{ de unde } \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \tag{3.58}$$

Aceasta este legătura dintre viteza unghiulară ω (în rad/s) și perioada T (în s) sau frecvența ν (în 1/s).

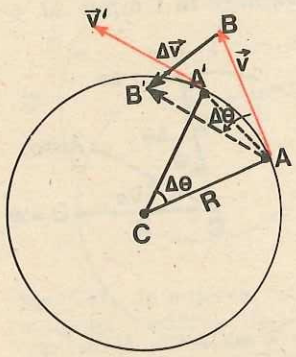


Fig. 3.49. Calculul accelerației centripete în mișcarea

3.5.2. **Accelerația centripetă.** În mișcarea circulară uniformă $|\vec{v}| = \text{const}$. sau $\Delta v \equiv 0$, dar $\vec{\Delta v} \neq 0$, deoarece *vectorul viteză* $\vec{v}$ *variază ca direcție* și deci *există o accelerație* $\vec{a} = \vec{\Delta v}/\Delta t$. Să calculăm această accelerație.

Să considerăm mobilul la două momente succesive t și $t' = t + \Delta t$ în punctele A, A' având vitezele $\vec{v}$, respectiv $\vec{v'}$, unde $|\vec{v'}| = |\vec{v}|$ (fig. 3.49).

Diferența $\vec{\Delta v} = \vec{v'} - \vec{v}$ se obține după cum știm unind vîrfurile vectorilor $\vec{v'}$, $\vec{v}$ duși din *același*

punct, de exemplu din A. Triunghiul vitezelor AB
unghiul CAA', ele fiind isoscele și avînd laturile r
Din asemănarea acestora avem

$$\frac{|\vec{\Delta v}|}{AA'} = \frac{v}{R}.$$

Pentru intervale de timp Δt foarte mici punctele A,
și coarda AA' coincide (la limită) cu arcul Δs. Atunc

$$\frac{|\vec{\Delta v}|}{\Delta s} = \frac{v}{R}, \quad |\vec{\Delta v}| = \frac{v}{R}\Delta s,$$

(pentru Δt și $\Delta s \rightarrow 0$).

Împărțind la Δt corespunzător, rezultă

$$|\vec{a}| = \frac{|\vec{\Delta v}|}{\Delta t} = \frac{v}{R}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}.$$

Direcția și sensul accelerației sînt date de segmentul
dicular pe AA'. Cînd Δt descrește către zero ($\Delta t \rightarrow 0$
coarda ia direcția tangentei la cerc în A, iar BB' ia
Prin urmare, accelerația este *radială, orientată spre c*
se numește accelerație *centripetă*. Ea este *perpendicula*
torie (pe tangenta la cerc sau pe vectorul viteză), c
accelerație *normală:*

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega v = \omega^2 R = 4\pi^2\frac{R}{T^2}$$

unde am ținut seama că $v = \omega R$ și $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$.
scrie și vectorial, folosind raza vectoare $\vec{r}$:

$$\vec{a}_n = -\omega^2\vec{r}.$$

Această relație *vectorială* ne dă accelerația centripetă
ca direcție și sens. Observăm că în mișcarea circulară
dar $\vec{a}_n$ variază permanent *ca direcție* (o dată cu raza

Dacă mișcarea circulară nu este uniformă, adică $|$
în variația $\vec{\Delta v}$ apare și un termen suplimentar care pro
lului vitezei și atunci vectorul accelerație $\vec{a}$ este orien
vectoare (variind ca modul și direcție).

3.5.3. **Forța centripetă.** Pentru a schimba vectoru
fie ca direcție, este nevoie de o forță aplicată corpu
mișca rectiliniu uniform, conform principiului inerție
uniformă accelerația este centripetă (3.59–3.60) și conf

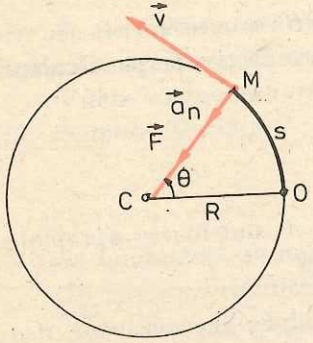


Fig. 3.50. Elementele mișcării circulare uniforme.

$\vec{F} = m\vec{a}$, asupra corpului trebuie să acționeze o *forță centripetă*, care să-determine mișcarea *circulară uniformă* (fig. 3.50):

$$F = ma_n = m\omega^2 R = m\omega v = m\frac{v^2}{R},$$

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}. \qquad (3.61)$$

Forța centripetă nu este un nou tip de forță. Ea poate fi forță elastică de tensiune a unui fir legat de corp, forță gravitațională exercitată de corpul central (de exemplu, în sistemul solar), forță electrică exercitată de nucleul atomului asupra electronilor etc.

EXPERIMENT

Descrierea dispozitivului. Pentru a verifica expresia forței centripete (3.61) putem face un experiment simplu. Luăm un tub de sticlă de diametru ≈ 1 cm și de lungime ≈ 10 cm cu marginile răsfrînte la un capăt și un fir de ≈ 80 cm. La un capăt al firului legăm un dop de masă bine cîntărită ($m \approx 2{,}0$ g) iar la celălalt capăt legăm un etalon de masă ($M \approx 20$ g) sau un dinamometru cu un capăt prins de masă (fig. 3.51).

Modul de lucru. 1. Aducem corpul m în mișcare circulară uniformă pe un cerc orizontal. Firul va fi întins de forța $F = Mg$ în varianta din figura 3.51, *a* sau de forța F indicată de dinamometru în varianta din figura 3.51, *b* și va avea o poziție practic orizontală, deci forța centripetă va fi practic chiar F (altfel trebuie calculată componenta orizontală a tensiunii din fir).

2. Alegem trei valori pentru raza R (20 cm; 40 cm și 60 cm) și măsurăm perioada respectivă (cronometrăm timpul a 10—20 rotații).

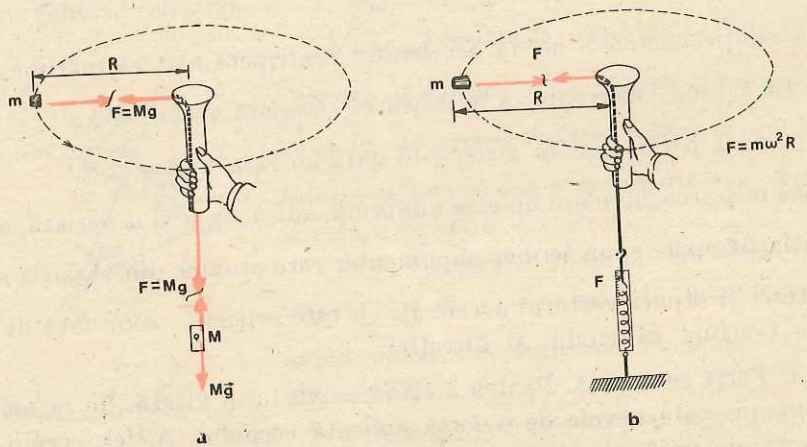


Fig. 3.51. Forța centripetă în mișcarea circulară uniformă.

3. Schimbăm corpul m (luăm un alt dop cu $m \approx$ rienta.

4. Schimbăm corpul M (luăm $M \approx 30$ g) sau me la o altă valoare a forței F și repetăm experiența.

Prelucrarea datelor. Trebuie să verificăm legea

$$F = m\omega^2 R = 4\pi^2 m\frac{R}{T^2}.$$

Alcătuim un tabel ca cel de mai jos:

F sau Mg [N]	m[kg]	R[m]	T
0,196	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$	0,40	0

Trebuie să comparăm valorile din prima coloană (coloană ($4\pi^2 mR/T^2$).

Experimentul simplu de mai sus, precum și nenur foarte precise și observații asupra mișcării circulare valabilitatea legii fundamentale $\vec{F} = m\vec{a}$ în cazul mișc carea circulară *uniformă* $\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$).

În mișcările circulare neuniforme, pe lîngă compon $= -m\omega^2 r$, care modifică *direcția* vectorului viteză, m nentă tangențială a forței ($F_t = mdv/dt$) care modifi viteză.

EXEMPLU

În mișcarea de rotație proprie diurnă a Pămîntului, să se lară de rotație a Pămîntului, viteza și accelerația centrip suprafața Pămîntului, aflat la latitudinea $\varphi = 45°$ (fig. 3.5

Rezolvare. Viteza unghiulară:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \text{ rad}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 7{,}29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}.$$

Ea este foarte mică (gîndiți-vă cît de încet trebuie să învîrtiți o minge ca ea să facă o rotație în 24 h). Viteza liniară:

$$v = \omega r = \omega R \cos\varphi = 7{,}29 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1} \cdot 6\,380 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \cos 45° = 330 \text{ m/s}$$

și accelerația centripetă:

$$a_n = \omega^2 r = \omega^2 R \cos\varphi = 0{,}024 \text{ m/s}^2,$$

mult mai mică decît g ($a_n \approx g/400$ sau 0,25% din g).

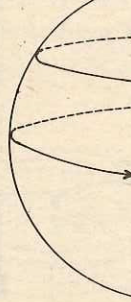


Fig. 3.52.

3.5.4. **Forța centrifugă. Aplicații.** Principiile mecanicii, așa cum le-am formulat, sînt valabile într-un sistem de referință *inerțial*, de exemplu legat de Soare (sistemul heliocentric) sau de stele și nebuloase sau chiar de *Pămînt* într-o aproximație destul de bună. Într-un astfel de sistem de referință este valabil principiul inerției: un corp (punct material) *izolat*, adică nesupus la nici o forță, se mișcă rectiliniu uniform în virtutea inerției, sau este în repaus.

Dacă însă privim mișcarea dintr-un sistem de referință *neinerțial*, adică accelerat față de stele sau față de Pămînt, atunci un corp izolat apare în mișcare accelerată *față de noi*, fără să putem indica vreo forță — cauză a mișcării accelerate. Invers, într-un sistem de referință neinerțial un corp poate fi în repaus, deși asupra lui acționează o forță rezultantă. De exemplu, fie pe un disc un corp legat de centru printr-un fir cu dinamometru, ambele aflate într-o mișcare de rotație *uniformă* (după atingerea rotației uniforme nu este nevoie de nici o forță tangențială) (fig. 3.53). Pentru observatorul terestru, inerțial, forța de tracțiune centripetă exercitată de resortul dinamometrului obligă corpul să execute mișcarea circulară uniformă. Pentru observatorul situat pe platformă corpul este în repaus (față de acest observator) deși este tras spre centru de forța indicată de dinamometru. Lucrurile se petrec ca și cum asupra corpului ar mai acționa o „forță", centrifugă, egală în modul și opusă ca sens cu forța reală centripetă.

Ori de cîte ori studiem mișcarea unui corp într-un sistem de referință *neinerțial*, pe lîngă forțele reale $\vec{F}$ trebuie să introducem anumite *forțe complementare* $\vec{F}_c$ pentru a putea scrie și în astfel de repere legea: forța este egală cu masa înmulțită cu accelerația ($\vec{F} + \vec{F}_c = m\vec{a}$).

Forțele complementare nu există pentru un observator inerțial, ele nu satisfac principiul III al mecanicii (al acțiunii și reacțiunii sau al acțiunii reciproce),

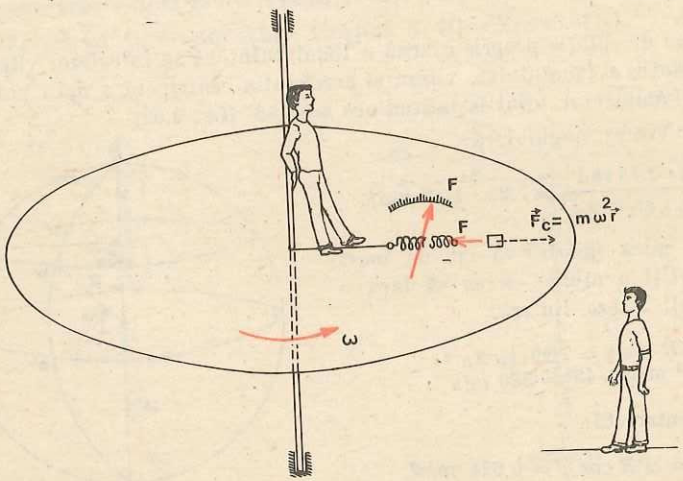


Fig. 3.53. Mișcarea circulară uniformă într-un sistem de referință inerțial și în sistemul de referință propriu.

nu există un corp din mediul înconjurător care să le exer
se exercite reacțiunea respectivă, adică ele nu sînt forțe
complementare se mai numesc pseudoforțe sau *forțe d*
Newton a numit *forțe de inerție*, forțele *reale* exercitat
față de repere inerțiale, *asupra legăturilor*, de exemplu
mîinii. Luna asupra Pămîntului.

Pentru observatorul neinerțial forțele complemen
ca forțe reale pe care el nu le poate discerne de forțele re
ajutorul unor *experiențe locale în cadrul restrîns al labo*
dacă examinează și *mediul înconjurător.*

În cazul mișcării circulare uniforme a unui corp
rotit solidar cu corpul, pe lîngă forța centripetă, apare și
centrifugă (forța de inerție centrifugă) $\vec{F}_c = +m\omega^2\vec{r}$,
relativ al corpului. De multe ori acest punct de ved
deoarece reduce problema dinamică la o problemă de
între aceste două forțe.

Iată cîteva exemple.

1. Într-un autobuz care virează brusc sîntem azv
forța (complementară) centrifugă, care va fi echilibra
produsă de peretele autobuzului sau de scaun. Pentru
inerțial, nu există această forță centrifugă, podeaua
sînt deviate în timp ce noi avem tendința să ne m
rectiliniu uniform, în virtutea inerției. Forța *cent*
perete ne obligă atunci să ne înscriem în mișcarea cir

2. *a*) Pe mașina centrifugă fixăm o tijă orizontală
două bile de mase diferite m_1, m_2, legate printr-un fir (f
bilele la egală distanță de axul de rotație și rotim tija,
masă mai mare m_2 este aruncată la margine, trăgînd du
mai mică m_1. În adevăr, în reperul legat de tijă asup
forțele centrifuge $F_1 = m_1\omega^2 R$, $F_2 = m_2\omega^2 R$ în sensuri
ceea ce explică deplasarea lor.

Dacă aranjăm bilele la distanțe invers proporțional
$= m_2/m_1$ sau $m_1R_1 = m_2R_2$, atunci forțele centrifuge s
de sensuri opuse și bilele rămîn în echilibru relativ la o

b) O altă experiență se face fixînd la mașina centrifugă un pahar bombat umplut cu mercur și apă colorată (fig. 3.55). În repaus, mercurul se așază la fund și apa deasupra, din cauza forțelor de greutate (mercurul avînd densitate mai mare decît apa).

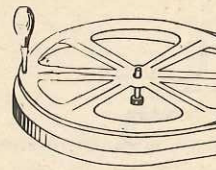


Fig. 3.54. Echilibr
centr

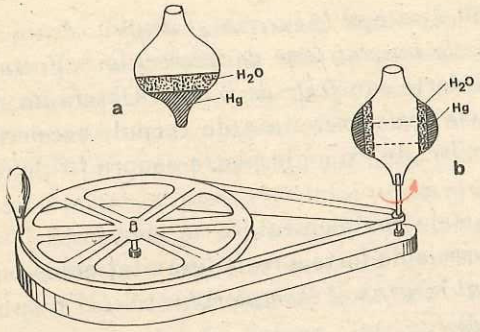


Fig. 3.55. Echilibrul lichidelor la mașina centrifugă.

Punînd în rotație rapidă paharul, constatăm că mercurul urcă și se așază ca un manșon la periferia bombată a paharului, iar apa în stratul următor spre centru. Această stratificare se explică cu ajutorul forțelor centrifuge, care sînt proporționale cu masa (și cu distanța pînă la axă), la fel cum se explică stratificarea în cazul repausului prin forțele de greutate.

c) Să punem pe mașina centrifugă un inel elastic de oțel care poate culisa liber pe axul vertical de rotație (fig. 3.56). Punînd în rotație inelul, el se turtește, datorită forțelor centrifuge care sînt proporționale cu distanța pînă la axa de rotație.

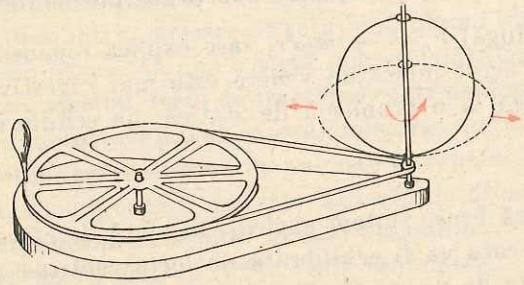


Fig. 3.56. Datorită rotației inelul se turtește.

Un astfel de efect explică turtirea Pămîntului la poli.

3. Pentru a preîntîmpina solicitarea inegală a șinelor și chiar răsturnarea vagoanelor la curbe, calea ferată este suprainălțată la șina exterioară. La viraj forța centripetă este produsă de șine (asupra cărora se exercită acțiunea roților). Forța centrifugă $\vec{F}_c$ se compune cu greutatea $\vec{G}$ pentru a da rezultanta $\vec{R}$. Dacă această rezultantă cade perpendicular pe drum, șinele vor fi egal solicitate (fig. 3.57).

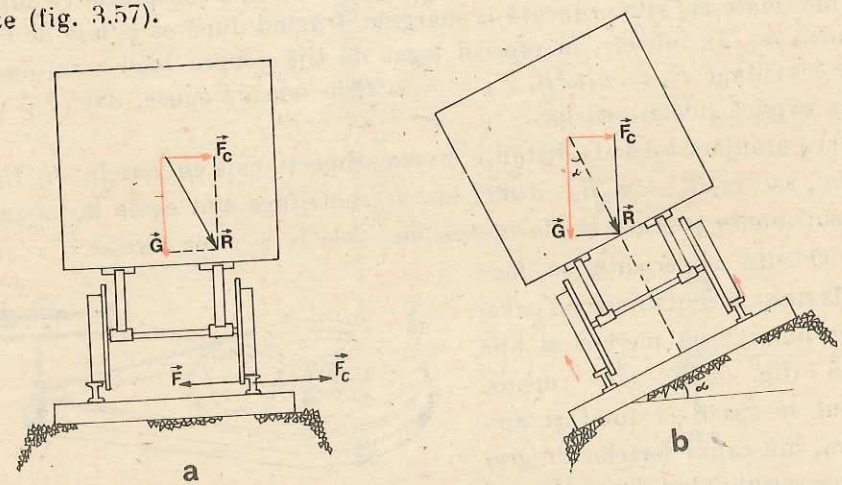


Fig. 3.57. La curbe linia exterioară este suprainălțată pentru a preîntîmpina solicitarea inegală a șinelor și chiar răsturnarea vagoanelor.

Unghiul de înclinare a drumului este dat de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{mv^2/R}{mg} = \frac{v^2}{gR}. \qquad (3.63)$$

El nu depinde de masa vehiculului, ci de viteza acestuia și de raza de curbură R a drumului.

Analog, la viraje, bicicliștii și motocicliștii se înclină spre centrul de rotație (de curbură) pentru a nu cădea (fig. 3.58):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_c}{G} = \frac{v^2}{gR},$$

adică același rezultat ca pentru înclinarea drumurilor.

4. *a*) *Separatorul centrifugal.* Pentru a separa rapid sie într-un lichid, se așază vasele la mașina centrifugă. centrifugă $F_c = m\omega^2 R$ este foarte mare și împinge pa mare spre fundul vasului, unde ele se depun (fig. 3.59)

b) *Uscătorul centrifugal.* Separarea lichidelor de aceleiași metode. Corpurile sînt așezate într-un vas c într-un vas cilindric mai larg (fig. 3.60). Prin rotirea ra lichidul este împins spre exterior, iese prin orificiile p vasul exterior.

Un astfel de uscător este folosit la mașinile de spă nător servește pentru scoaterea mierii de albine din fa

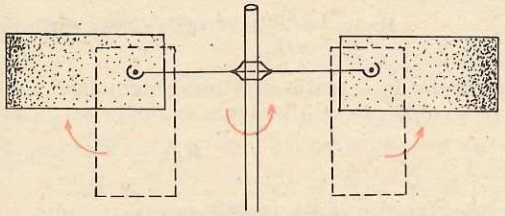


Fig. 3.59. Separatorul centrifugal.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Pendulul conic. Un corp de dimensiuni neglijabile, sus printr-un fir de lungime $l = 0{,}40$ m, este pus să descri plan orizontal. Firul de suspensie descrie atunci pînza $2\alpha = 2 \cdot 60°$ (fig. 3.61).

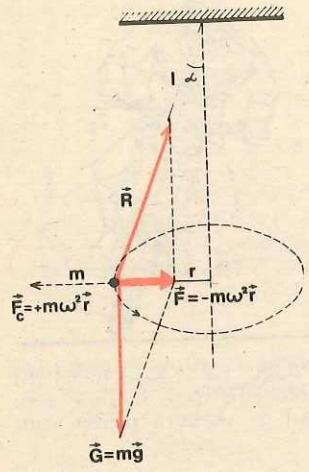


Fig. 3.61. Pendulul conic.

Să se afle perioada de rotație.

Rezolvare. Asupra corpului acționează două forțe: greutatea și tensiunea din fir. Rezultanta lor trebuie să fie forța centripetă, egală cu $m\omega^2 r$, deoarece corpul are o mișcare circulară uniformă. Din paralelogramul forțelor se vede că

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{F}{mg} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{4\pi^2 r}{T^2 g},$$

dar $r = l \sin\alpha$, de unde

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}} = 0{,}9 \text{ s}. \qquad (3.64)$$

Dacă considerăm sistemul de referință propriu atunci adăugăm forța centrifugă $\vec{F}_c = +m\omega^2\vec{r}$ și scriem condiția de echilibru relativ.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Cum trebuie să circule automobiliștii la curbe, dacă vremea este umedă (mîzgă) sau este polei? De ce?

   R: cu viteză redusă (pericol de derapaj datorită forței centrifuge și aderenței scăzute).

2. Ce viteză unghiulară și ce perioadă are o placă de patefon cu turația $n = 33$ rot/min?

   R: $\omega = 2\pi n = 1{,}1\,\pi \cong 3{,}5$ rad/s; $T = \frac{1}{n} = 1{,}8$ s.

3. Viteza liniară periferică a discurilor de polizor nu trebuie să depășească $v = 100$ m/s. Ce turație maximă poate avea un disc de diametru $D = 20$ cm?

   R: $n = \frac{v}{\pi D} = 16$ rot/s $= 960$ rot/min.

4. Să se afle durata a $N = 100$ rotații efectuate de o roată cu viteza unghiulară $\omega = 4\,\pi$ rad/s.

   R: $t = \frac{2\pi N}{\omega} = 50$ s.

5. Care este perioada de rotație și viteza unghiulară a acelor unui ceasornic?

   R: orar $T = 12$ h, $\omega = 1{,}45 \cdot 10^{-4}$ rad/s; minutar $T = 1$ h, $\omega = 1{,}75 \cdot 10^{-3}$ rad/s; secundar $T = 1$ min, $\omega = 0{,}105$ rad/s.

6. Vîrful minutarului unui ceasornic dintr-un turn s-a deplasat cu $\Delta s = 15{,}7$ cm într-un timp $\Delta t = 1$ min. Care este lungimea minutarului?

   R: $l = \frac{T\Delta s}{2\pi\Delta t} = 1{,}50$ m.

7. Un automobil se mișcă cu viteza $v = 72$ km/h și are roți cu diametrul $D = 60$ cm. Care este turația roților și accelerația normală a punctelor periferice ale roților?

   R: $n = v/\pi D = 10{,}6$ rot/s; $a_n = v^2/R = 1\,330$ m/s$^2 = 136 \cdot g$.

8. Cu ce viteză și în ce sens ar trebui să zboare un avion de a vedea Soarele staționar?

   R: $v = 2\pi$

9. Care ar trebui să fie durata unei zile și nopți pentru ca la E greutate (aparentă, ținînd seama de rotația Pămîntului)?

   R: T

10. Un autobuz de masă $m = 10{,}0$ t merge cu viteza $v = 54$ curbat: *a*) convex; *b*) concav, cu raza de curbură $R = 1$ autobuzul asupra drumului în punctul superior, respectiv

    R: $N = mg \mp$

11. Un corp de masă $m = 5{,}0$ kg (o căldare cu apă), legat d $= 1{,}00$ m, este rotit într-un plan vertical. Care este frecve tru ca sfoara să rămînă întinsă (apa să nu curgă)? Care v acest caz, cînd corpul trece prin punctul inferior?

    R: $\nu_{min} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 0,$

12. Un copil învîrtește o piatră, cu frecvența $\nu = 120$ rot/min înt de un fir de lungime $l = 1{,}0$ m. În ce moment trebuie să piatra să zboare vertical în sus? Pînă la ce înălțime se va

    R: cînd piatra este la capătul diametrului

    h

13. Cu ce unghi trebuie înclinat drumul la o curbă de rază R circulație cu viteza $v = 54$ km/h ?

    R: tg α

14. Un camion face un viraj de rază $R = 100$ m cu viteza v să fie coeficientul de frecare la alunecare minim dintre a autocamionul să nu lunece?

    R: $\mu_{min} = v^2/Rg = 0{,}23$.

15. La ce distanță maximă de centru poate fi așezată o monedă pe un disc de patefon care se rotește cu turația $n = 78$ rot/min pentru ca moneda să nu lunece? Coeficientul de frecare la lunecare $\mu = 0{,}30$.

    R: $R_{max} = \mu g/4\pi^2 n^2 = 4{,}4$ cm.

16. Cu ce turație minimă trebuie rotit un cilindru de rază $r = 1{,}0$ m în jurul axei sale verticale, pentru ca un corp așezat pe peretele interior al cilindrului să rămînă în repaus față de cilindru (fig. 3.62)? Coeficientul de frecare între corp și cilindru $\mu = 0{,}25$.

    R: $n = (1/2\pi)\sqrt{g/\mu r} = 1{,}0$ rot/s.

Fi
pe

3.6.1. **Deformări elastice. Legea lui Hooke.** Cînd o forță acționează asupra unui corp, atunci acesta își modifică starea de mișcare sau se deformează. Vom analiza cazul cînd forțele produc numai deformări asupra corpului cu care interacționează.

Să tragem de un fir (tijă) dintr-un material oarecare (cauciuc, oțel, plumb, material plastic). Vom observa că firul se alungește, se deformează. Dacă acțiunea forței încetează sînt posibile două situații:

a) deformația nu dispare;

b) deformația dispare.

În primul caz deformările sînt permanente și ele caracterizează materialele numite *plastice*. În această categorie deosebim materiale ca: ceara, plastilina, plumbul, smoala etc.

În al doilea caz deformările sînt *elastice*. Majoritatea corpurilor prezintă această proprietate numită elasticitate. Corpuri perfect elastice nu există, dar dacă forțele care acționează asupra lor nu depășesc anumite limite, atunci deformațiile sînt considerate elastice.

EXPERIMENT

Un fir cilindric (de oțel sau cauciuc) de lungime l_0 și arie S_0 (aria secțiunii transversale), este suspendat vertical la un capăt (fig. 3.63, *a*). De capătul inferior se suspendă discuri identice cu masa cunoscută. Sub acțiunea greutății unui disc lungimea firului devine l (fig. 3.63, *b*). Diferența $l - l_0 = \Delta l$ se numește alungire absolută. Dacă suspendăm de fir două discuri, adică dacă dublăm forța de greutate se constată că și alungirea se dublează (fig. 3.63, *c*). Dacă forța crește de trei, de patru sau de mai multe ori, se constată că și alungirea crește de același număr de ori. Concluzia care se impune este:

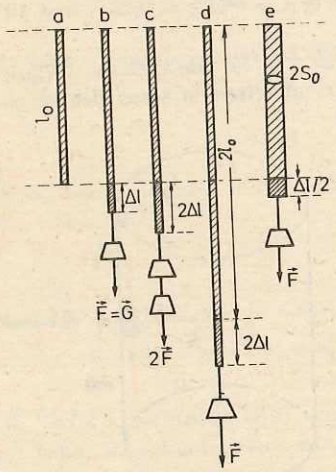


Fig. 3.63. Alungirea barei este direct proporțională cu forța deformatoare și cu lungimea sa inițială și invers proporțională cu aria secțiunii transversale.

alungirea este proporțională cu forța deformatoare $\Delta l \sim F$.

Alegem acum un fir din același material avînd aceeași secțiune dar lungimea inițială dublă $2l_0$. Suspendînd un disc ca în figura 3.63, *d*, se poate observa că în acest caz alungirea este dublă față de cazul din figura 3.63, *b*. Deci:

alungirea este proporțională cu lungimea inițială $\Delta l \sim l_0$.

Dacă înlocuim firul cilindric de lungime l_0 cu un altu
din același material dar cu aria secțiunii $2S_0$, suspendîn
observa că alungirea lui devine $\Delta l/2$ (fig. 3.63, *e*). Pe ac
la concluzia:

alungirea este invers proporțională cu aria secțiunii tr
lului solicitat $\Delta l \sim \frac{1}{S_0}$.

Rezultatele obținute pe cale experimentală pot fi p

$$\Delta l \sim \frac{Fl_0}{S_0}.$$

Dacă lungimea inițială l_0, aria secțiunii (transversale)
care acționează asupra firului vor rămîne neschimbate, d
cu fire din materiale diferite vom obține alungiri diferite,
deci și de *natura materialului* supus solicitării. Aceste cons
pot fi scrise sub forma:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{Fl_0}{S_0} \text{ sau } \frac{F}{S_0} = E\frac{\Delta l}{l_0}, \sigma = E\varepsilon$$

unde E este un factor de proporționalitate.

Raportul $F/S_0 = \sigma$, ce reprezintă forța exercitată p
față, se numește *tensiune sau efort unitar*; $\Delta l/l_0 = \varepsilon$ repre
alungirea absolută și lungimea inițială și se numește
deformație specifică; factorul de proporționalitate E
material și se numește *modul de elasticitate longitudin*
Young, se măsoară în N/m².

Relația (3.65) arată că alungirile relative $\Delta l/l_0$ sînt p
turile unitare F/S_0, pentru un material dat. Această de
legea lui Hooke sau legea deformărilor elastice. Legea lu
empirică, obținută experimental, valabilă pînă la anumit
unitar, valori caracteristice materialului solicitat, mot
denumită și lege de material.

Scriind relația (3.65) sub forma

$$F = \frac{ES_0}{l_0}\Delta l$$

și observînd că pentru un sistem fizic (de exemplu: fi
nostru, un resort etc.) putem pune $ES_0/l_0 = k$ (consta
constantă de elasticitate (a firului sau a resortului) av

$$F = k\Delta l.$$

Constanta k se măsoară în N/m.

Notînd deformarea elastică (alungirea sau comprim
nem, pentru forța care provoacă deformarea, expresia

$$F = kx.$$

Putem determina pe cale experimentală constanta
resort elastic, utilizînd legea deformărilor elastice.

Din trusa de experienţe de mecanică, alegem dinamometrul etalonat pentru măsurarea forţelor pînă la 1 N şi fixăm pe marginea lui o hîrtie milimetrică ca în figura 3.64. Pe ea vom măsura alungirile. Dinamometrul se fixează apoi, pe un suport aşa cum se arată în figura 3.65, iar de cîrligul său se suspendă cîrligul pentru discuri crestate, cu mase cunoscute. Se introduc pe el diferite discuri şi pentru fiecare valoare a masei discului (a greutăţii) se notează alungirea resortului. Fiecare determinare permite calculul factorului k din relaţia $F = k\Delta l$, unde $F = G = mg$.

Se înlocuieşte dinamometrul de 1 N cu cel de 2,5 N şi se repetă determinările. Rezultatele obţinute se trec într-un tabel (k_m este valoarea medie pentru k):

	Dinamometru 1N				Dinamometru 2,5 N			
Determinarea	$F = G$ (N)	Δl (m)	k (N/m)	k_m (N/m)	$F = G$ (N)	Δl (m)	k (N/m)	k_m (N/m)
1								
2								

Se obţin valori identice pentru fiecare determinare? De ce? Puteţi determina eroarea făcută?

3.6.2. **Forţa elastică.** În timpul deformării unui corp, în el apar forţe F_e egale ca valoare cu forţele deformatoare F şi orientate în sens opus acestora (fig. 3.66). Deci aceste forţe sînt de forma:

$$F_e = -kx. \tag{3.67}$$

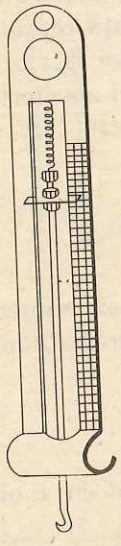


Fig. 3.64. Dinamometru.

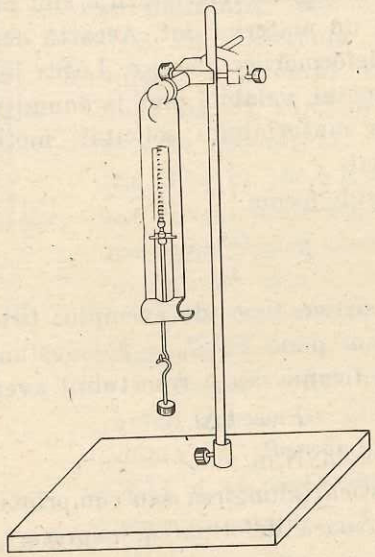


Fig. 3.65. Dispozitiv experimental pentru determinarea constantei elastice.

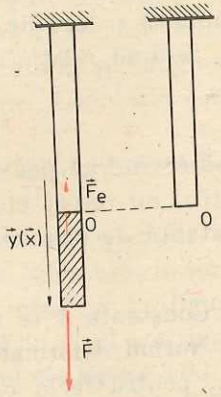


Fig. 3.66. În orice moment, forţa elastică este egală cu forţa deformatoare şi îndreptată în sens opus ei.

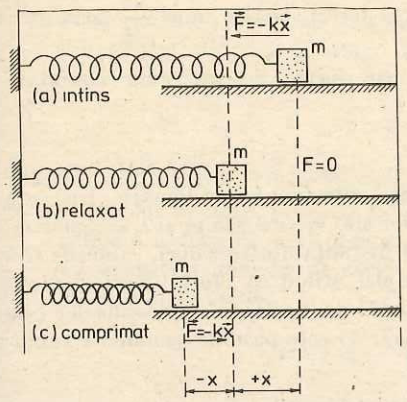


Fig. 3.67. Un resort elastic. Forţa exercitată de resort este arătată în fiecare caz. Corpul alunecă pe o masă fără frecări.

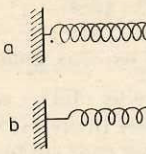


Fig. 3.68. Gr
alungire a for
şi de sens o

Forţa F_e, proporţională cu valoarea deformaţiei şi o creşterii deformaţiei, se numeşte forţă elastică.

Forţele elastice sînt forţe interne care apar între re corpurilor solicitate şi sub acţiunea cărora ele revin la forn plu de forţă elastică este forţa care apare într-un resor deformări (întindere sau comprimare). Figura 3.67 ilus deformează resortul cu $\Delta l = x$ şi forţa elastică $F_e = -$ sort şi care tinde să-l readucă la forma iniţială. Figura 3 dependenţei de alungire, $\Delta l = x$, a forţei deformatoare, forţa elastică.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un ascensor cîntăreşte 980 kg, iar cablul său de acţionare, di 25 m şi cîntăreşte 0,800 kg/m. Pornirea se face uniform accel 1,96 m/s². Efortul unitar admisibil în cablu σ_a este de 117, otel modulul de elasticitate este $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N/m². Se cere suportată de cablu la pornire; *b)* secţiunea cablului, pentru unitar admisibil; *c)* alungirea cablului datorită forţei de tracţi elastică care apare în cablu, la pornirea ascensorului, dacă sec de la punctul *b*.

Rezolvare. a) Ascensorul şi cablul au împreună $m = 980 + 25$ de tracţiune la pornire are valoarea:

$$F = m(g + a) = 1\,000 \cdot 11{,}76 = 11\,760 \text{ N}.$$

b) Din relaţia $\sigma_a = \frac{F}{S}$ rezultă $S = \frac{F}{\sigma_a} = \frac{11\,760}{11\,760 \cdot 10^4} = 10^{-4}$ m

c) Din $\Delta l = \frac{Fl}{SE}$ se obţine $\Delta l = \frac{11\,760 \cdot 25}{10^{-4} \cdot 19{,}6 \cdot 10^{10}} = 0{,}015$ m

d) Din $F = -k\Delta l$ unde $k = \frac{SE}{l}$ rezultă valoarea forței elastice $F = \frac{SE}{l}\Delta l =$

$= \frac{10^{-4} \cdot 1{,}96 \cdot 10^{11}}{25} \cdot 15 \cdot 10^{-3} = 11\,760$ N, egală cu forța de tracțiune exercitată asupra cablului, dar de sens opus acesteia.

2. Două cabluri metalice de oțel cu secțiunile egale $S_1 = S_2 = S = 1$ cm² sînt fixate de cîte un zid, iar capetele libere ale lor trebuie prinse împreună în prelungire. Distanța dintre ziduri este $l = 12$ m, iar lungimile cablurilor sînt $l_1 = 6{,}930$ m și $l_2 = 5{,}065$ m. Lungimea totală a cablurilor fiind mai mică decît distanța dintre ziduri, cablurile trebuie întinse bine, pentru a se putea prinde între ele. Știind că efortul unitar admisibil la întindere $\sigma_a = 117{,}6 \cdot 10^6$ N/m² și că modulul de elasticitate al cablurilor este $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m² se cer: *a)* tensiunile din cabluri; *b)* este posibilă prinderea cablurilor fără ca acestea să se rupă?

Rezolvare. a) După prinderea capetelor cablurilor tensiunile care apar au aceeași valoare:

$$T_1 = T_2 = T.$$

Suma alungirilor celor două cabluri trebuie să fie egală cu distanța dintre capetele care trebuie unite:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = l - (l_1 + l_2) = 12 - 11{,}995 = 0{,}005 \text{ m}.$$

Dar: $\Delta l_1 = \frac{T_1 l_1}{ES_1} = \frac{Tl_1}{ES}$ și $\Delta l_2 = \frac{T_2 l_2}{ES_2} = \frac{Tl_2}{ES}$.

Avem acum: $\Delta l = \frac{T}{ES}(l_1 + l_2)$ și de aici rezultă:

$$T = \frac{ES\,\Delta l}{l_1 + l_2} = \frac{2{,}1 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{11{,}995} = 8\,753 \text{ N}.$$

b) Eforturile unitare în cabluri sînt:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{T}{S} = \frac{8\,753}{10^{-4}} = 87{,}53 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2.$$

Pentru că $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_a$ rezultă că cele două cabluri pot fi întinse fără ca ele să se rupă.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Care este diferența între forța exprimată prin legea lui Hooke și forța elastică?

2. O bară de oțel cilindrică cu lungimea l_0=19,8 m s-a alungit datorită unei forțe de întindere $F = 98$ N cu $\Delta l = 0{,}455$ mm. Să se calculeze raza barei. Se cunoaște modulul de elasticitate al oțelului $E = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N/m².

R: $R_0 = \sqrt{\frac{Fl_0}{\pi E\,\Delta l}} = 0{,}26 \cdot 10^{-2}$ m.

3. Pentru a măsura modulul lui Young, se suspendă un corp cu greutatea $G = 4\,410$ N de un fir de oțel cu lungimea $l_0 = 5$ cm și secțiunea $S_0 = 0{,}0625$ cm²; se găsește că alungirea absolută a firului este $\Delta l = 0{,}18$ mm. Să se calculeze: efortul unitar σ, alungirea relativă ε și modulul de elasticitate E al firului de oțel.

R: $\sigma = \frac{G}{S_0} = 7\,056 \cdot 10^5$ N/m²; $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = 0{,}0036$; $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = 1{,}96 \cdot 10^{11}$ N/m².

4. Să se calculeze alungirea unei bare de oțel de secțiune pătrat sub efectul propriei greutăți. Densitatea barei este $\rho = 7$ $= 2{,}1 \cdot 10^{11}$ N/m². Se consideră $g = 10$ m/s².

R: $\Delta l = \frac{}{2}$

5. Un cablu de oțel are lungimea l_0=20 m și este format din împl Cu cablul de acest profil se ridică un corp cu masa $m = 90$ cablului a fost $\Delta l = 15$ mm și $E = 2{,}15 \cdot 10^{11}$ N/m², $g =$
a) diametrul unui fir de oțel;
b) efortul în cablu.

R: *a)* $d_0 = \sqrt{\frac{4\,mgl_0}{N\pi E\,\Delta l}} = 1$ mm; *b)* $\frac{F}{S_0} =$

6. Un corp de masă $m = 510$ kg este deplasat pe un plan orizon paralel cu direcția planului. Cablul are lungimea l_0, se modulul de elasticitate $E = 2{,}15 \cdot 10^{11}$ N/m². Considerînd g de frecare la alunecare a corpului pe plan $\mu = 0{,}215$, să se
a) raportul alungirilor cablului în cazul deplasării uniforme a sării uniform accelerate cu accelerația $a = 2{,}5$ m/s²;
b) alungirile relative în cele două cazuri de deplasare.

R: *a)* $\frac{\Delta l_u}{\Delta l_a} = \frac{\mu g}{a + \mu g} \approx 0{,}46$; $\frac{\Delta l_u}{l_0} = \frac{\mu mg}{S_0 E} \approx 3 \cdot 10^{-6}$; *b)* $\frac{\Delta l_a}{l_0} =$

3.7. LEGEA ATRACȚIEI UNIVERSALE A LUI CÎMPUL GRAVITAȚIONAL

3.7.1. Legea atracției universale a lui Newton. Prop a cădea către Pămînt, greutatea sa, a fost privită ca c tuturor corpurilor pînă în secolul al XVII-lea. Newton est că greutatea unui corp trebuie privită ca o forță de at și acel corp.

Mișcarea corpurilor cerești, în particular cea a plane pe vremea lui Newton un subiect de mare interes. Leg corpuri erau considerate ca fiind cu totul diferite de ce rilor de pe Pămînt. Newton a considerat că aceeași fo atrage un corp (de exemplu un măr) către Pămînt, ar put și Luna către Pămînt, altfel ea s-ar mișca pe o traiectorie (aproape) circulară.

Datorită acestei forțe de atracție apare o accele poate fi calculată știind perioada de revoluție de $T =$ pe care se mișcă Luna în jurul Pămîntului, $R_{PL} = 380$ (accelerației centripete se obține

$$a_L = 4\pi^2 \frac{R_{PL}}{T^2} = 2{,}7 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2.$$

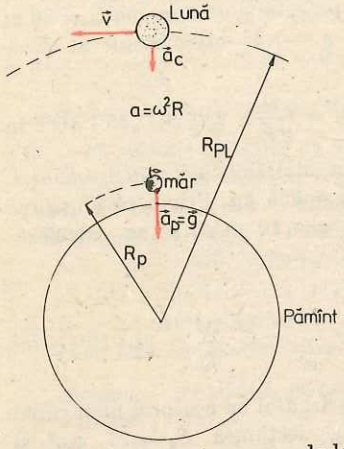


Fig. 3.69. Luna și un corp de la suprafața Pământului sînt atrase spre centrul Pământului.

Această valoare, $a_L = 2{,}7 \cdot 10^{-3}$ m/s², este de aproximativ 3 600 ori mai mică decît g, adică

$$a_L = \frac{g}{3\,600} = \frac{9{,}8}{3\,600}\ \text{m/s}^2.$$

Newton a explicat această diferență, bazîndu-se pe ideea că accelerația unui corp în cădere este invers proporțională cu pătratul distanței sale pînă la Pămînt, $1/R^2$. Considerînd masa Pămîntului concentrată în centrul său, un corp care cade la suprafața Pămîntului se află la o distanță de o rază terestră, $R_P \approx$ $\approx$ 6 400 km de centrul efectiv de atracție. Dar Luna se află la aproximativ 380 000 km distanță (R_{PL}) de Pămînt. Pătratul raportului acestor distanțe

$$\left(\frac{R_P}{R_{PL}}\right)^2 = \frac{(6\,400)^2}{(380\,000)^2} = \frac{1}{3\,600}$$

este în concordanță cu raportul a_L/g.

Forțele exercitate asupra Lunii și asupra corpului de la suprafața Pămîntului depind de masa Lunii și respectiv de masa corpului precum și de masa Pămîntului. Așadar Newton a presupus că forța de atracție gravitațională depinde atît de masele corpurilor care se atrag cît și de inversul pătratului distanței dintre ele. Mai mult, el a considerat că toate corpurile din Univers, indiferent unde s-ar afla ele, exercită o forță de atracție gravitațională (fig. 3.69) unele asupra altora.

Forța gravitațională dintre două corpuri cu masele m_1 și m_2 considerate punctiforme față de distanța dintre ele, situate la o distanță r unul față de altul, este o forță de atracție care acționează de-a lungul liniei ce unește corpurile și are valoarea:

$$F = K\,\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (3.68)$$

unde K este o constantă universală avînd aceeași valoare pentru orice pereche de corpuri din Univers.

Relația (3.68) exprimă *legea atracției universale.*

Observații. Forțele gravitaționale dintre două corpuri constituie o pereche acțiune-reacțiune. Corpul de masă m_1 exercită, asupra corpului de masă m_2, o forță $\vec{F}_{12}$, avînd direcția dată de dreapta care unește cele două corpuri și sensul așa cum se arată în figura 3.70. La rîndul său corpul de masă m_2 exercită, asupra corpului de masă m_1, o forță $\vec{F}_{21}$ egală în valoare cu $\vec{F}_{12}$,

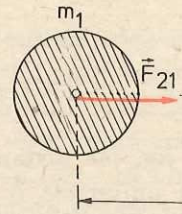


Fig. 3.70. Forțele corpuri sînt forțe pereche

Relația (3.68) exprimă valoarea forței de atracție gravitațională dintre două corpuri punctiforme. Pentru corpuri ca Pămîntul, Luna, Soarele etc. se va presupune că întreaga masă este concentrată în centrele lor de masă.

Legea atracției universale implică ideea că forța gravitațională dintre două corpuri este independentă de prezența proprietățile spațiului dintre ele.

Constanta K poate fi determinată pe cale experimental măsurată forța de atracție dintre două corpuri de mase cuno de acest fel a fost făcută de Cavendish în 1798. Astăzi, pentr versale, este acceptată valoarea $K = 6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg

Constanta K a fost determinată cu ajutorul balanței de zentată în figura 3.71.

De capetele unei tije rigide și ușoare de lungime l sînt fixa de masă m(50 g). Tija prevăzută cu cele două sfere este suspen foarte fin din cuarț, astfel încît axa ei să fie orizontală. Două s M(50 kg) sînt situate în vecinătatea capetelor tijei și determină, ționale, răsucirea firului de cuarț. Măsurînd pe scală unghiul c poate calcula valoarea forței de atracție dintre sfere, pentru că ională cu unghiul de răsucire a firului, Fl = constantă · α.

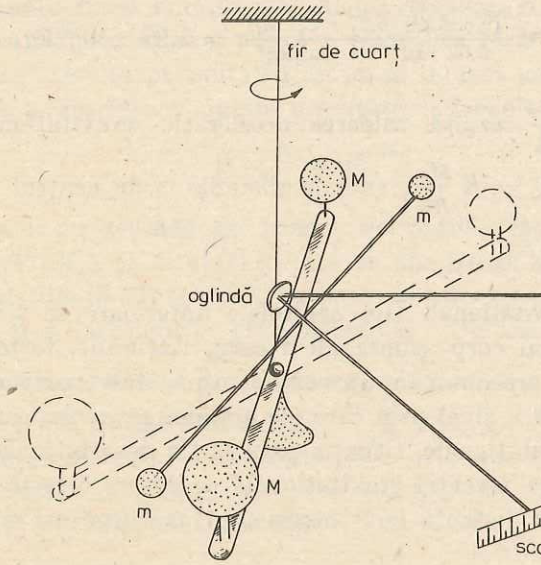


Fig. 3.71. Balanța lui Cavendish folosită p determinarea constantei K.

Din:

$$F = K\frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ rezultă } K = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

și dacă $m_1 = m_2 = 1$ kg, iar distanța $r = 1$ m se obține $K = F$. Adică:

Constanta atracției universale K este numeric egală cu forța, exprimată în newtoni, care se exercită între două corpuri punctiforme avînd fiecare masa de 1 kg și fiind situate la distanța de 1 metru.

Rezultă că două corpuri punctiforme, cu masa de un kilogram fiecare, aflate la un metru depărtare unul de altul se atrag cu o forță egală cu $6{,}673 \cdot 10^{-11}$ N ceea ce reprezintă aproximativ $\frac{1}{15} \cdot 10^{-9}$ N! Acum se poate înțelege de ce forța de atracție dintre două corpuri aflate la suprafața Pămîntului nu poate fi observată direct. În timp ce două corpuri cu masa de cîte un kilogram fiecare, aflate la un metru depărtare unul de altul, se atrag cu o forță de $F = \frac{1}{15} \cdot 10^{-9}$ N, fiecare dintre ele este atras de Pămînt cu o forță de $F' = 9{,}8$ N, deci o forță de $147 \cdot 10^9$ ori mai mare decît F.

Forța gravitațională mare pe care Pămîntul o exercită asupra tuturor corpurilor de la suprafața sa se datorește masei foarte mari a Pămîntului. Știind valoarea lui K putem determina masa Pămîntului. Să considerăm Pămîntul de masă M_P și un corp de pe suprafața sa cu masa m. Forța de atracție gravitațională este dată atît de legea a II-a a dinamicii $F = mg$ cît și de relația $F = K\frac{mM_P}{R_P^2}$, de unde rezultă:

$$M_P = \frac{gR_P^2}{K} = \frac{(9{,}8 \text{ m/s}^2)\,(6{,}37 \cdot 10^6 \text{ m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2} = 5{,}97 \cdot 10^{24} \text{ kg}.$$

Din $mg_0 = K\frac{mM_P}{R_P^2}$ rezultă valoarea accelerației gravitaționale la suprafața Pămîntului, $g_0 = K\frac{M_P}{R_P^2}$, care la distanța r de centrul Pămîntului are valoarea $g = K\frac{M_P}{r^2}$. (3.69)

3.7.2. **Cîmpul gravitațional.** Din capitolele anterioare se știe că forță înseamnă acțiunea unui corp asupra altui corp. Acțiunile, forțele, care se exercită între corpuri presupun fie un contact direct între corpuri, fie legături materiale (tije, sfori, șine) prin care ele acționează unele asupra altora. În cazul atracției gravitaționale, situația pare să fie deosebită. De aceea s-a vorbit la început despre atracția gravitațională ca despre o forță care acționează instantaneu și la distanță fără intermediul unei legături materiale între corpuri.

Cel care a formulat ideea că în cazul gravitației este vorba de un efect care se transmite din aproape în aproape, de la un punct din spațiu la altul, a fost Faraday.

Astăzi se consideră că orice corp modifică proprie
ținului înconjurător, în așa fel încît în acest spațiu asupr
caracteristica particulară masă, masă grea sau gravifică,
Cu alte cuvinte, regiunea din spațiu în care există un
este purtătoarea unei proprietăți fizice noi, care în abs
manifestă. În această regiune se manifestă un sistem fiz
tațional sau cîmp gravific.

Cîmpul gravitațional, formă de existență a materi
stanță, face posibilă transmiterea din aproape în aproa
corpuri. Legea atracției universale ne arată că orice cor
sursă, un izvor, de cîmp gravitațional.

De exemplu, fie Pămîntul o sursă de cîmp gravitați
surse (Lună, Soare, planete). Dacă în vecinătatea Pămî
corp de masă $m \ll M_P$, denumit corp de probă, atun
exercita o forță de atracție F pe direcția razei Pămîntu
care trece prin acel punct (fig. 3.72). Valoarea acestei f

$$F = K\frac{mM_P}{r^2},$$

unde r este distanța dintre centrul Pămîntului și corpul
Pămîntului, m masa corpului de probă.

Raportul

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{\Gamma},$$

definește mărimea fizică numită *intensitatea cîmpului gr*
sursa gravifică Pămînt în acel punct și semnifică forța
țională care se exercită pe unitatea de masă în acel pu
definiția dată intensității cîmpului gravitațional rezultă

$$\Gamma = \frac{F}{m} = K\frac{M_P}{r^2}.$$

Deci mărimea Γ nu depinde de corpul de probă, ea
sursa gravifică (M_P) și locul (r) în care se analizează c
Comparînd relațiile (3.69) și (3.70′) se poate constata ega
mărimilor Γ și g (accelerația gravitațională). De ase
observă că mărimea $\vec{\Gamma}$ este o mărime vectorială.

Din faptul că intensitatea cîmpului gravitațional este o mărime vectorială, rezultă că putem descrie sistemul cîmp gravitațional cu ajutorul unei mulțimi de vectori $\vec{\Gamma}$ atașați punctelor din jurul sursei gravitaționale unde aceasta își manifestă

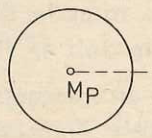


Fig. 3.72. Forța (
de Pămînt asupra
intensitatea ($\vec{\Gamma}$) a

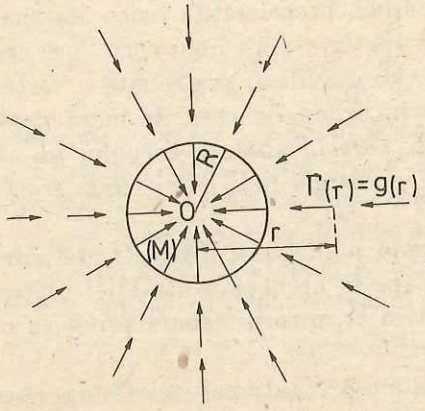


Fig. 3.73. Un cîmp gravitaţional radial, generat de un corp sferic omogen şi vectorii intensitate ataşaţi acestui cîmp.

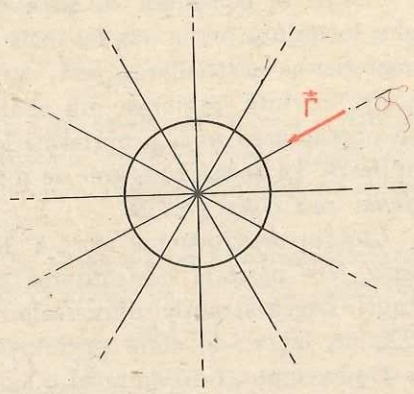


Fig. 3.74. Reprezentarea unui cîmp gravitaţional prin linii de cîmp.

prezenţa (fig. 3.73). Deoarece acestui cîmp fizic i se poate asocia un cîmp de vectori se spune că el este un *cîmp vectorial*. Cîmpul gravitaţional produs de o distribuţie statică dată a masei unui corp este şi un exemplu de *cîmp staţionar*, deoarece valoarea intensităţii cîmpului într-un punct dat nu variază în timp.

Cîmpul gravitaţional, ca orice cîmp fizic de altfel, poate fi reprezentat şi prin linii de cîmp. Liniile de cîmp sînt linii a căror tangentă coincide în fiecare punct cu direcţia vectorului intensitate a cîmpului respectiv. Pentru un corp sferic omogen liniile de cîmp arată ca în figura 3.74 şi ele coincid cu direcţiile razelor care pornesc din centrul sursei de cîmp; un astfel de cîmp este un *cîmp radial sau central.*

Măsurători efectuate la distanţe mari (de ordinul $10^2 - 10^4$ km), cu ajutorul sateliţilor artificiali, au dus la concluzia că în cazul Pămîntului, cîmpul său gravitaţional este un cîmp radial.

Dacă este investigat, cercetat, cîmpul gravitaţional al Pămîntului în imediata sa vecinătate, în regiuni de mică întindere, de exemplu într-o sală de clasă sau de laborator, atunci se poate constata că în puncte diferite ale spaţiului investigat $\vec{\Gamma}$ are aceeaşi valoare, iar direcţiile vectorilor intensitate sînt paralele. Deci, în astfel de regiuni cîmpul gravitaţional al Pămîntului poate fi descris prin linii de cîmp paralele şi echidistante, intensitatea cîmpului avînd aproximativ aceeaşi valoare în toate punctele (fig. 3.75). Un astfel de cîmp se numeşte *cîmp uniform.*

În cazul unui sistem de surse gravifice, intensitatea cîmpului într-un punct este suma vectorială a intensităţilor cîmpurilor gravitaţionale produse de fiecare sursă în punctul considerat (fig. 3.76).

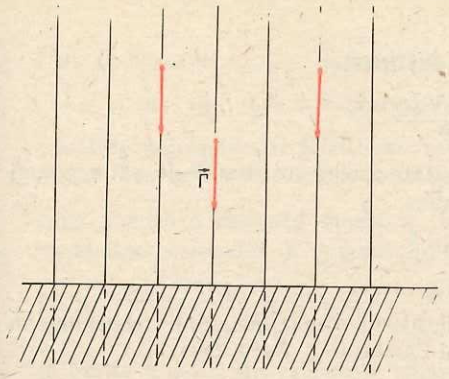


Fig. 3.75. Cîmp gravitaţional uniform.

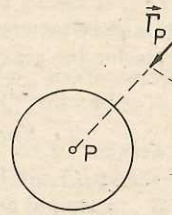


Fig. 3.76. Int
taţional prod
surse gravific
a intensităţil
produse de fie

3.8. MASA GRAVIFICĂ. RELAŢIA DINTRE MAS
ŞI MASA INERŢIALĂ. SATELIŢII ARTIF

3.8.1. Masa gravifică. Relaţia dintre masa gravifică şi masa

paragraful 2.3.1 s-a arătat că în ecuaţia (2.5), $\vec{F} = m\vec{a}$, masa apa
a inerţiei corpului. Într-adevăr dacă încercăm să împingem un c
suprafaţă orizontală, fără frecări, constatăm că este necesară o a
pune în mişcare. Aici se manifestă inerţia corpului, gravitaţia n
mentul se poate face şi într-un spaţiu lipsit de gravitaţie (star
În acest caz pentru accelerarea corpului ar fi necesară aceeaşi fo
m este masă inertă.

În cele ce urmează vom arăta că există situaţii diferite d
de asemenea este implicată masa corpului. De exemplu, pentru a
deasupra Pămîntului este necesară o forţă, în caz contrar lăsat
Pămînt într-o mişcare accelerată. Forţa care ţine corpul este ega
de atracţie gravitaţională dintre el şi Pămînt. În această situaţ
un rol; aici este importantă proprietatea corpurilor materiale de a
cum ar fi Pămîntul. Forţa de atracţie gravitaţională este:

$$F = K\frac{m_g M_P}{R_P^2},$$

unde m_g este masa gravitaţională, masa grea a corpului.

Sînt masele m_g (masa gravitaţională) şi m (masa inertă) ale aceluiaşi corp identice?

Fie două corpuri A şi B, de mici dimensiuni, cu masele gravitaţionale m_{gA} şi m_{gB} asupra cărora acţionează un al treilea corp C cu masa gravitaţională m_{gC}. Fie corpul C la egală distanţă r de celelalte două (fig. 3.77). Forţa gravitaţională exercitată asupra lui A de către C este.

$$F_{AC} = K\frac{m_{gA}\, m_{gC}}{r^2},$$

Fig. 3.77. F
corp C asu
şi B aflate

forța gravitațională cu care C acționează asupra lui B este:

$$F_{BC} = K \frac{m_{gB} m_{gC}}{r^2}.$$

Raportul dintre forțele gravitaționale exercitate asupra lui A și B de către corpul C este egal cu raportul maselor lor gravitaționale:

$$\frac{F_{AC}}{F_{BC}} = \frac{m_{gA}}{m_{gB}}.$$

Dacă cel de-al treilea corp C este Pămîntul, atunci F_{AC} și F_{BC} sînt ceea ce numim greutățile corpurilor A și B, în cîmpul gravific al Pămîntului. Avem deci:

$$\frac{G_A}{G_B} = \frac{m_{gA}}{m_{gB}}.$$

Așadar legea atracției universale implică faptul ca greutățile diferitelor corpuri, în același loc pe suprafața Pămîntului sînt exact proporționale cu masele lor gravitaționale.

Să măsurăm masele inerte m_A și m_B ale corpurilor A și B pe o cale oarecare (de exemplu prin metoda ciocnirilor). Să lăsăm apoi aceste corpuri să cadă spre Pămînt dintr-un anumit loc și să măsurăm accelerațiile mișcărilor lor. Se află experimental, că obiecte, corpuri, cu mase inerțiale diferite cad cu aceeași accelerație g datorită atracției gravitaționale terestre. Dar forțele de atracție gravitaționale exercitate asupra corpurilor reprezintă chiar greutățile lor, astfel încît din legea a doua a dinamicii obținem:

$$G_A = m_A \cdot g \text{ și } G_B = m_B \cdot g$$

sau

$$\frac{G_A}{G_B} = \frac{m_A}{m_B}.$$

Deci greutățile corpurilor în același loc de pe Pămînt sînt de asemenea exact proporționale cu masele lor inerte.

Așadar masa inertă și masa gravitațională sînt cel puțin proporționale între ele. Astăzi se consideră că masa inerțială este echivalentă cu masa gravitațională.

În anul 1909 Eötvös a construit un aparat care putea detecta o diferență de $5 \cdot 10^{-9}$ în valoarea forței gravitaționale. El a aflat că masele inerte egale suferă totdeauna forțe gravitaționale egale în limitele preciziei aparatului său.

În fizica clasică, newtoniană, echivalența dintre masa gravitațională și masa inertă a fost considerată ca o coincidență remarcabilă fără vreo semnificație mai adîncă. În fizica modernă, însă, echivalența masei grele și a masei inerțiale este considerată un fapt fundamental care duce la o înțelegere mai profundă a gravitației.

3.8.2. **Sateliți artificiali.** Să considerăm un punct A situat în cîmpul gravitațional al Pămîntului la distanța r de centrul acestuia (fig. 3.78). Un corp de masă m lăsat

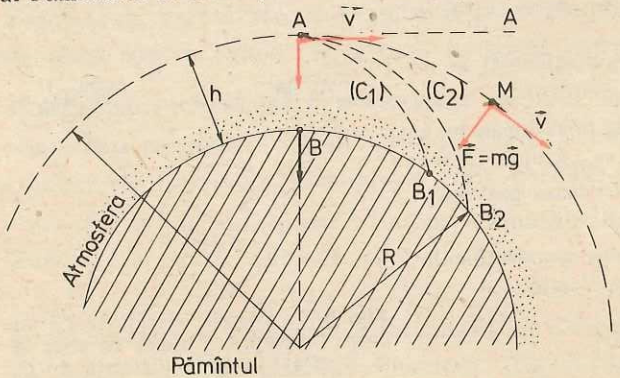


Fig. 3.78. Există o valoare a vitezei cu care un corp lansat din A se deplasează pe o traiectorie ce înconjură Pămîntul devenind satelit artificial.

liber în punctul A, se va mișca după direcția razei r, adică cădea în punctul B, de la suprafața Pămîntului. Dacă în punc orientată perpendicular pe direcția intensității cîmpului gravi atunci el se mișcă descriind o traiectorie curbă care nu mai c cîmp. Pentru o anumită viteză $\vec{v}_1$ a corpului, acesta se va va ajunge pe Pămînt în punctul B_1. Pentru o altă viteză v_2 pe o curbă C_2 și va ajunge în B_2. Se observă, că pe măsură ajunge pe Pămînt într-un punct din ce în ce mai depărtat să existe o astfel de valoare a vitezei $\vec{v}$ pentru care corpul ci descrie o mișcare circulară în jurul Pămîntului. Un astfel *artificial al Pămîntului.*

Cînd satelitul descrie o mișcare circulară în jurul Păm traiectoriei, direcția vectorului viteză $\vec{v}$ este perpendiculară cîmpului gravitațional radial. Accelerația centripetă a satelitul de forța gravitațională a Pămîntului, $F = m\Gamma$. Din legea a

$$F = ma \text{ și } \frac{mv^2}{r} = m\Gamma, \text{ de unde rezultă } \frac{v^2}{r}$$

Deci pentru a descrie o traiectorie de rază r viteza sate valoarea:

$$v = \sqrt{r\Gamma(r)},$$

unde $\Gamma(r)$ este intensitatea cîmpului gravitațional în punct toriei satelitului. Ea este numeric egală cu valoarea g a acc acel loc $\Gamma(r) = g(r)$.

Un satelit artificial al Pămîntului care are traiectoria suprafeței lui trebuie să aibă viteza $v_0 = \sqrt{R \cdot g_0} = 7{,}9$ km/s raza Pămîntului și $g_0 = 9{,}8$ m/s^2 este accelerația gravitați tului. Valoarea $v_0 = 7{,}9$ km/s se numește *prima viteză cosmi* teristică cîmpului gravitațional al Pămîntului.

Dacă satelitul se află la distanța $r = R + h$ de centr

$$\Gamma = g(r) = k \frac{M_P}{(R+h)^2} \text{ și } \Gamma_0 = g_0(R) = K$$

$$g(r) = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

și înlocuind în expresia lui v se obține:

$$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}}.$$

Pentru ca traiectoria satelitului să fie relativ stabilă să nu se exercite forțe de frecare cu aerul (forțe perturbatoa tudinea h la care se plasează un satelit este mare, de ordinul a 1 aerului este pronunțată (mare).

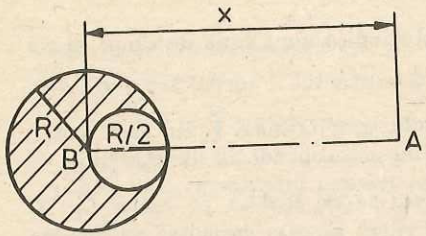


Fig. 3.79. La problema rezolvată.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Într-o sferă masivă de masă m_1 și de rază R se practică o cavitate sferică de rază $R/2$ care este tangentă la suprafața sferei masive.

Să se exprime forța gravitațională dintre sferă și un punct material m_2 aflat la distanța $x (x \gg R)$ de centrul sferei masive și pe direcția care unește centrul sferei cu centrul cavității.

Rezolvare. Deoarece în enunț se specifică $x \gg R$ vom considera atît sfera cît și cavitatea sferică drept puncte materiale situate în centrele sferelor.

Distingem două cazuri:

a) punctul material se află de aceeași parte cu cavitatea (fig. 3.79). În acest caz forțele de interacțiune sînt F_1, F_2 iar rezultanta lor este:

$$F = F_1 - F_2, \tag{1}$$

unde $F_1 = K\dfrac{m_1 m_2}{x^2}$ și $F_2 = K\dfrac{m_1 m_2}{8(x - R/2)^2}$ și înlocuind în (1)

$$F = \frac{K m_1 m_2}{8} \cdot \frac{7x^2 - 8xR + 2R^2}{x^2(x - R/2)^2};$$

b) punctul material se află în partea opusă cavității.

Avem în acest caz:

$$F' = F_1' - F_2'. \tag{1'}$$

Unde $F_1' = K\dfrac{m_1 m_2}{x^2}$ și $F_2' = K\dfrac{m_1 m_2}{8\left(x + \dfrac{R}{2}\right)^2}$ și înlocuind în (1') avem:

$$F' = \frac{K m_1 m_2}{8} \cdot \frac{7x^2 + 8xR + 2R^2}{x^2(x + R/2)^2}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Considerînd Pămîntul și Luna două corpuri punctiforme, explicați cum variază greutatea unui cosmonaut într-o călătorie cu mișcare rectilinie uniformă de la Pămînt la Lună.
2. Explicați de ce toate corpurile cad la fel de repede în vid cu toate că forța de atracție gravitațională este proporțională cu masa lor.
3. Undeva, într-un punct de pe suprafața Pămîntului se așază un tun uriaș. Se poate lansa un satelit artificial al Pămîntului folosind acest tun? (Se neglijează dificultățile tehnice și frecările cu aerul.)
4. Se confecționează un proiectil suficient de mare ca să încapă în el oameni și materiale. Proiectilul este lansat în vid dintr-un tun special. Pasagerii afirmă că la un moment dat au încetat să mai simtă atracția gravitațională. Cînd a fost posibil acest lucru?

   R: tot timpul (din momentul părăsirii tunului pînă la atingerea Pămîntului).

5. Un corp cu masa $m_1 = 800$ kg se află la distanța $r = 0{,}25$ $m_2 = 600$ kg. Să se calculeze intensitatea cîmpului gravit la $r_1 = 0{,}20$ m de m_1 și la distanța $r_2 = 0{,}15$ m de m_2.

   R: $\Gamma = \sqrt{\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + 2\Gamma_1\Gamma_2 \cos\alpha}$,

   cos

6. Cunoscînd că distanța dintre Pămînt și Lună este $d = 384$ să se afle la ce distanță de centrul Lunii cîmpul gravitațion

   R: $x = \dfrac{d}{1 + \sqrt{m_p}}$

7. Două corpuri sferice cerești au raportul razelor 1/2 iar rap ționale 3/2. Știind că valoarea masei primului corp este masa celuilalt corp ceresc M_2.

   R: M_2 =

8. Știind că raza Soarelui este R și densitatea medie a materie mine distanța Pămînt-Soare, dacă perioada de rotație a P este T.

9. De pe o planetă cu raza $R = 1/8$ din raza Pămîntului, artificial pe o orbită circulară la înălțimea $h = 600$ km. este $m = 8 \cdot 10^{21}$ kg să se calculeze: *a)* viteza tangențială ca litului; *b)* viteza unghiulară și *c)* perioada lui de rotație.

   R: $v = \sqrt{\dfrac{Km}{R + h}} \approx 0{,}6$ km/s; $\omega = \dfrac{v}{R + h} \approx 0{,}75 \cdot 10^{-}$

4

ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ŞI A SISTEMULUI DE PUNCTE MATERIALE

4.1. LUCRUL MECANIC EFECTUAT LA MIŞCAREA PUNCTULUI MATERIAL ÎNTR-UN CÎMP DE FORŢE

4.1.1. **Noţiunea de lucru mecanic.** În activitatea sa fizică, omul întrebuinţează fie propria sa forţă musculară, fie aceea a animalelor de muncă sau a maşinilor, cu scopul de a pune în mişcare o unealtă, un vehicul prin învingerea unei alte forţe, care se opune mişcării, sau inerţiei.

Astfel, un muncitor acţionează asupra unui cărucior deplasîndu-l (fig.4.1.). Forţa $\vec{F}$ cu care acţionează muncitorul asigură deplasarea căruciorului învingînd forţa de frecare.

În toate procesele în care se transmite mişcarea de la un corp la alt corp, un rol esenţial îl joacă o mărime fizică numită *lucru mecanic*.

Măsura lucrului mecanic este legată de noţiunea de forţă şi de deplasarea punctului de aplicaţie al forţei.

Se spune că o forţă efectuează lucru mecanic cînd aceasta acţionînd asupra unui corp îşi deplasează punctul de aplicaţie pe o anumită distanţă.

4.1.2. **Lucrul mecanic al unei forţe constante al cărei punct de aplicaţie se deplasează pe suportul său.** Un corp ale cărui deplasări în spaţiu sînt limi-

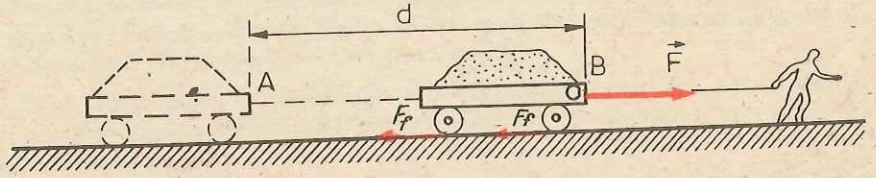
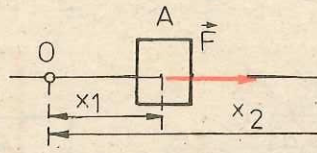


Fig. 4.1. Un om deplasează un cărucior pe un drum orizontal. Lucrul mecanic efectuat în timpul acestei deplasări este determinat de forţa de tracţiune $\vec{F}$ şi de deplasarea punctului de aplicaţie al acesteia pe distanţa d.

Fig. 4.2. Lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ pentru o deplasare d a punctului său de aplicaţie pe suportul său este: $L = Fd$



tate de către alte corpuri de care este legat sau cu ca
numeşte corp supus la legături sau neliber. Exemple:
male, o lustră fixată printr-o tijă de tavan, un vagon
pe şine.

Un corp care nu este legat de alte corpuri şi care se
direcţie din spaţiu se numeste corp liber. Exemple: un
aer, un elicopter în timpul zborului.

Să considerăm un corp liber asimilat cu un punc
acţionat de o forţă constantă $\vec{F}$ şi care îl deplasează pe
puncte A şi B, de coordonate x_1 şi x_2. Corpul fiind li
direcţia şi în sensul forţei (fig. 4.2).

*Prin definiţie, lucrul mecanic al unei forţe constan
aplicaţie se deplasează pe distanţa d, în direcţia şi în sens
produsul dintre mărimea forţei şi mărimea deplasării:*

$$L = Fd,$$

unde $d = x_2 - x_1$ este distanţa dintre punctele A şi B
sează punctul de aplicaţie al forţei.

Forţa care produce mişcarea se numeşte *forţă moto*
opune mişcării se numeşte *forţă rezistentă*. Lucrul meca
se numeşte *lucru mecanic motor*, iar cel al forţei reziste
mecanic rezistent.

Lucrul mecanic definit prin relaţia (4.1) se poat
metodă grafică. Reprezentăm grafic variaţia forţei $\vec{F}$ în
$F = f(x)$, într-un sistem de coordonate FOx. Forţa F,
x_1 şi x_2 graficul funcţiei $f(x)$ este o dreaptă paralelă cu a
dusul $F(x_2 - x_1) = Fd$, reprezintă
aria suprafeţei limitată de curba
$F = f(x)$ de axa Ox şi de segmentele perpendiculare pe axa Ox în
punctele $A(x_1, 0)$ şi $B(x_2, 0)$. Acest
produs este egal cu lucrul mecanic efectuat de forţă pe distanţa AB.

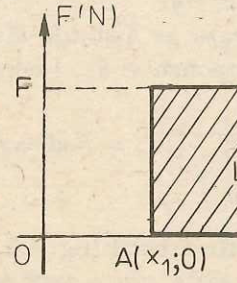


Fig. 4.3. Lucrul mecan
stantă $\vec{F}$ pe distanţa d
aria suprafe

Această metodă de aflare a lucrului mecanic este valabilă şi în cazul în care forţa F nu este constantă.

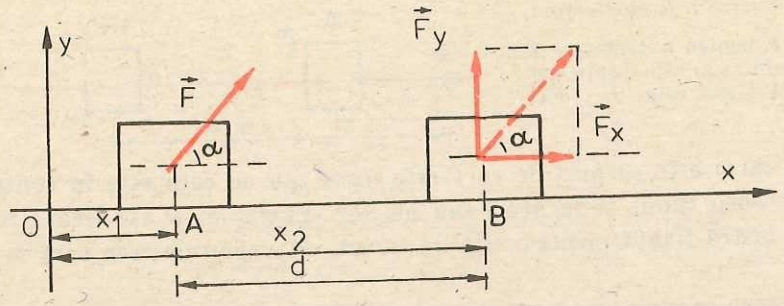


Fig. 4.4. Lucrul mecanic al forței $\vec{F}$, a cărei direcție este oblică în raport cu direcția deplasării, este egal cu produsul dintre componenta forței pe direcția deplasării și mărimea deplasării: $L = Fd \cos \alpha$.

Dacă în relația (4.1) se ia $F = 1$ N și $d = 1$ m se obține unitatea de lucru mecanic în SI, numită joule (J):

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ newton} \times 1 \text{ metru}.$$

Un joule este lucrul mecanic efectuat de o forță de 1 newton al cărei punct de aplicație se deplasează cu un metru pe suportul forței și în sensul forței.

4.1.3. **Lucrul mecanic al unei forțe constante a cărei direcție face un unghi cu direcția deplasării.** Să considerăm un corp, asimilat cu un punct material, supus la legături, care se poate deplasa pe direcția Ox, sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$, a cărei direcție face unghiul α cu direcția Ox.

Pentru calculul lucrului mecanic al forței $\vec{F}$, se poate folosi, și în acest caz, relația (4.1).

Se descompune forța $\vec{F}$ în două componente, după direcțiile perpendiculare Ox și Oy (fig. 4.4):

$$F_x = F \cos \alpha; \; F_y = F \sin \alpha. \tag{4.2}$$

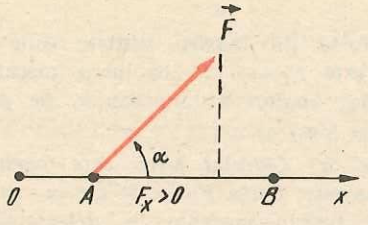
Lucrul mecanic al componentei F_y este zero deoarece ea nu produce nici o deplasare pe direcția Oy.

Corpul se deplasează pe distanța d, între punctele A și B de abscise x_1 și x_2 sub acțiunea componentei F_x. Lucrul mecanic produs de această componentă este:

$$L = F_x d = Fd \cos \alpha, \tag{4.3}$$

unde $d = x_2 - x_1$.

Dacă unghiul α este ascuțit (fig. 4.5, *a*), forța $\vec{F}$ contribuie la deplasarea punctului material, aceasta este o *forță motoare* și efectuează un lucru mecanic motor; $\cos \alpha > 0$ deci $L = Fd \cos \alpha > 0$; pentru $\alpha = 0$, $L = Fd$ și pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $L = 0$.



a

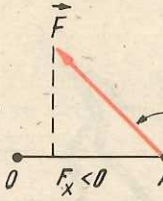


Fig. 4.5. Cînd forța $\vec{F}$ face un unghi $\alpha < \frac{\pi}{2}$ cu direcția d
un lucru mecanic motor, $L > 0$; pentru $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\pi$
un lucru mecanic rezistent, $L < 0$.

Dacă unghiul $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ (fig. 4.5, *b*), forța $\vec{F}$ s
$\vec{F}$ este o *forță rezistentă* și efectuează un lucru mecani
caz $\cos \alpha < 0$, deci $L = Fd \cos \alpha < 0$; pentru $\alpha = \pi$, L

EXEMPLE

1. Un om pune în mișcare, pe o suprafață orizontală, un corp cu
nînd asupra lui cu o forță $F = 50$ N, a cărei direcție face cu
$\alpha = 37°$ ($\cos 37° = 0{,}8$). Acțiunea omului asupra corpului dure
forțele de frecare, să se calculeze lucrul mecanic efectuat de o
Rezolvare. a) Calculul deplasării corpului. Vom calcula mai
aplicînd relația fundamentală a dinamicii (fig. 4.6):

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Proiectînd relația (4.4) pe direcția deplasării (pe dir

$$F_x = F \cos \alpha = ma,$$

de unde:

$$a = \frac{50 \text{ N} \cdot 0{,}8}{20 \text{ kg}} = 2 \text{ m/s}^2.$$

În 3 secunde corpul s-a deplasat pe distanța

$$d = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 9 = 9 \text{ m}; \; v_0 = 0.$$

b) Calculul lucrului mecanic. Calculăm lucrul mecanic aplicînd relația (4.3):

$$L = Fd \cos \alpha = 50 \cdot 9 \cdot 0{,}8 = 360 \text{ J}.$$

2. Un copil trage o sanie de masă $m = 4$ kg, cu o forță $\vec{F}$ care face cu direcția deplasării un unghi α, imprimîndu-i o accelerație $a = 3$ m/s².

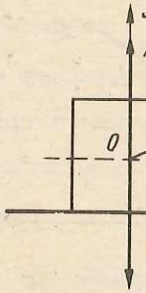


Fig. 4.6

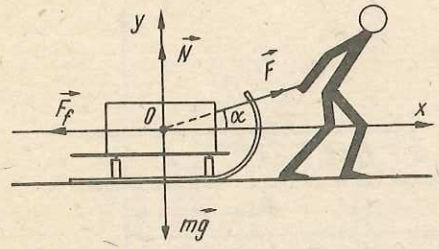


Fig. 4.7. La exemplul 2.

Dacă forţa de frecare dintre sanie şi zăpadă este $F_f = 5$ N, ce lucru mecanic a efectuat copilul asupra saniei, pe distanţa $d = 4$ m?

Rezolvare. a) Calculul forţei care produce lucrul mecanic. Forţa $F_x = F \cos \alpha$, care produce lucrul mecanic o determinăm aplicînd relaţia fundamentală a dinamicii, la mişcarea saniei (fig. 4.7):

$$\vec{F}_f + \vec{N} + \vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}. \qquad (4.5)$$

Proiectînd relaţia (4.5) pe direcţia deplasării, adică pe direcţia Ox, obţinem:

$$-F_f + F \cos \alpha = ma; \; F \cos \alpha = ma + F_f.$$

b) Calculul lucrului mecanic. Lucrul mecanic produs de forţa F este dat de relaţia:

$$L = (F_f + ma) \cdot d = (5 \text{ N} + 4 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s}^2) \cdot 4 \text{ m} = 68 \text{ J}.$$

4.1.4. **Produsul scalar a doi vectori.** Vom defini o nouă operaţie cu vectori şi anume o operaţie de înmulţire a vectorilor.

Regulile de înmulţire a vectorilor sînt diferite de regulile de înmulţire a mărimilor scalare. Se pot defini două feluri de produse a doi vectori:

a) produsul scalar, al cărui rezultat este o mărime scalară;

b) produsul vectorial, al cărui rezultat este o mărime vectorială.

Produsul vectorial urmează să fie definit în capitolul 6 (§ 6.1); acum vom defini produsul scalar a doi vectori.

Să considerăm doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$, orientaţi după direcţiile (D_1) şi (D_2), care fac între ei unghiul α (fig. 4.8).

Se numeşte produs scalar al vectorilor $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ numărul real notat cu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, egal cu produsul modulelor celor doi vectori prin cosinusul unghiului dintre ei.

Astfel:

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha. \qquad (4.6)$$

Relaţia (4.6) se mai poate scrie şi astfel:

$$s = (a \cos \alpha)b = a(b \cos \alpha) = a_1 b = ab_1,$$

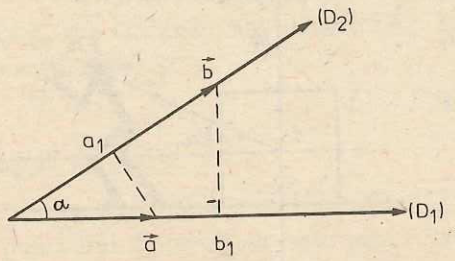


Fig. 4.8. Produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ este numărul real $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \alpha$.

unde $a_1 = a \cos \alpha$ reprezintă componenta vectorului $\vec{a}$ pe direcţia (D_2), iar $b_1 = b \cos \alpha$ este componenta lui $\vec{b}$ pe direcţia (D_1).

Prin urmare produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre modulul unuia dintre ei prin componenta celuilalt pe direcţia primului vector.

Analizînd relaţia (4.6) observăm că:

a) produsul scalar este zero, $(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0)$, cînd u modulul egal cu zero $(a = 0$ sau $b = 0)$, sau cînd vect

$$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}, \; \cos \frac{\pi}{2} = 0\right);$$

b) produsul scalar este maxim cînd vectorii s $\cos 0 = 1)$;

c) produsul scalar este comutativ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = ab \cos \alpha;$$

d) produsul scalar are şi proprietatea de distributiv

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Produsul scalar al unui vector prin el însuşi este d

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = a^2; \; a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Aplicăm această proprietate a produsului scalar pe rezultantei a doi vectori. Notînd cu $\vec{c}$ suma vectorilor $\vec{a}$ şi făcînd produsul scalar al vectorului $\vec{c}$ prin el însuş

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

de unde

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha,$$

unde α este unghiul dintre cei doi vectori.

Notînd cu $\vec{d}$ vectorul diferenţă al vectorilor $\vec{a}$ şi şi făcînd produsul scalar al vectorului $\vec{d}$ prin el însuşi,

$$\vec{d} \cdot \vec{d} = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

din care rezultă

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha.$$

Ţinînd seamă de relaţia de definiţie a produsulu spune că *lucrul mecanic al unei forţe constante $\vec{F}$, care de aplicaţie pe distanţa d este egal cu produsul scalar al*

$$L = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos \alpha.$$

Dacă forţa şi deplasarea au acelaşi sens lucrul mecan mecanic motor), iar dacă forţa şi deplasarea sînt de mecanic este negativ (lucru mecanic rezistent).

Din proprietatea de distributivitate a produsului scalar, față de adunare, rezultă că lucrul mecanic al rezultantei $\vec{R}$ a unui sistem de forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ este egal cu suma lucrurilor mecanice ale forțelor componente:

$$L = \vec{R} \cdot \vec{d} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) \cdot \vec{d} = \vec{F}_1 \cdot \vec{d} + \vec{F}_2 \cdot \vec{d} + \ldots + \vec{F}_n \cdot \vec{d};$$
$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n.$$

4.1.5. **Lucrul mecanic al forței de greutate.** Să considerăm o regiune restrînsă din apropierea Pămîntului în care cîmpul gravitațional este uniform. În această regiune liniile de cîmp sînt drepte paralele, iar accelerația gravitațională este constantă, adică are în toate punctele aceeași mărime, direcție și sens. Greutatea unui punct material care se mișcă în acest cîmp rămîne constantă în tot timpul mișcării lui.

Într-un punct A al acestui cîmp, la înălțimea h față de suprafața Pămîntului, se află un corp de masă m, asimilat cu un punct material. Punctul material se poate deplasa de la nivelul A la nivelul B, pe verticală, sau urmînd unul dintre drumurile următoare: CD; $FGHIJKL$ sau NO (fig. 4.9).

Vom calcula lucrul mecanic al greutății corpului, cînd acesta cade liber pe verticală și apoi cînd corpul se deplasează pe planul înclinat CD, considerînd frecarea neglijabilă.

Lucrul mecanic al greutății pe distanța $AB = h$ este

$$L = mgh. \tag{4.9}$$

Lucrul mecanic al greutății corpului, cînd acesta se deplasează pe distanța $CD = l$, se poate calcula aplicînd formula (4.1). În acest scop, înlocuim greutatea cu componentele sale $G_t = G \sin \alpha$ pe planul înclinat și $G_n = G \cos \alpha$, normală pe planul înclinat.

Reacțiunea normală $\vec{N}$ a planului înclinat și forța componentă $\vec{G}_n$ nu efectuează lucru mecanic. Prin urmare, efectuează lucru mecanic numai forța componentă $\vec{G}_t$:

$$L = G_t l = mgl \sin \alpha = mgh, \tag{4.10}$$

deoarece $l \sin \alpha = h$.

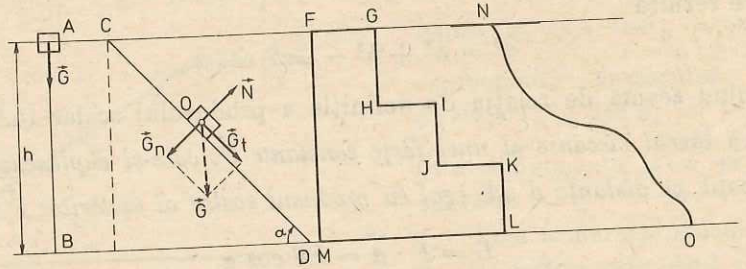


Fig. 4.9. Lucrul mecanic al greutății este egal cu produsul dintre modulul său prin diferența de nivel dintre punctul inițial și punctul final al drumului urmat de punctul său de aplicație (centrul de greutate): $L = mgh$.

Rezultă că:

lucrul mecanic al greutății este independent de drum material și de legea mișcării acestuia și este egal prin diferența de nivel h, dintre poziția inițială și material.

Greutatea efectuează același lucru mecanic fie că mul AB, fie pe drumul $FG \ldots KL$ sau pe drumul NO.

O forță care, acționînd asupra unui punct materia mecanic independent de drumul parcurs și de lege punctul material și depinde numai de pozițiile punctel riei se numește *forță conservativă*. Exemple de forțe c forța elastică, forța electrostatică etc.

O regiune din spațiu, limitată sau nelimitată, un face simțită acțiunea unei forțe determinată în modul, că formează un cîmp de forțe. Cîmpul ale cărui forț numește *cîmp de forțe conservativ*. Cîmpul gravitațion cîmp de forțe conservativ, nelimitat, creat în jurul un Forța care se face simțită în acest cîmp este forța de exercitată asupra corpurilor plasate în punctele cîmpul

EXEMPLE

1. Se transportă un punct material de masă m, în cîmpul drumul închis $FGH \ldots LMF$ (fig. 4.9). În timpul acestei d material acționează mai multe forțe, printre care greutatea calculeze lucrul mecanic al greutății și lucrul mecanic al f drum închis.

Rezolvare. a) Calculul lucrului mecanic al greutății. Calculăm m parțiale pe diferitele porțiuni de drum:

$L_{FG} = 0$, forța este perpendiculară pe deplasare;

$L_{GH} = mg \cdot GH$; $L_{HI} = 0$; $L_{IJ} = mg \cdot IJ$; $L_{JK} = 0$; L_I

$L_{MF} = -mg \cdot MF$, lucru mecanic rezistent.

Lucrul mecanic efectuat de greutate pe întreg drumul est mecanice parțiale:

$$L_{FF} = mg\ (GH + IJ + KL - MF) = 0$$

deoarece segmentul MF este egal cu suma segmentelor GH lucrul mecanic al greutății pe un drum închis este egal cu z

b) Calculul lucrului mecanic al forței de frecare. În cazul exem 4.9, forța de frecare este paralelă cu deplasarea și de sens op mecanic al forței de frecare este egal cu produsul dintre mărime drumului total parcurs de punctul material:

$$L_{Ff} = F_f \cdot (FG + HI + JK + LM +$$

pe GH, IJ și KL forța de frecare fiind nulă.

Lucrul mecanic al forței de frecare depinzînd de lungimea d că forța de frecare nu este o forță conservativă. Se spune c *forță disipativă*.

2. Un copil aruncă o minge cu masa $m = 100$ g pe verticală în sus și o prinde în punctul din care a fost aruncată. Mingea atinge înălțimea maximă $h_m = 5$ m. Să se calculeze lucrul mecanic al greutății în timpul urcării mingii la înălțimea h_m, la coborîrea mingii pe aceeași distanță și pe toată distanța parcursă de minge. Se va lua $g = 10$ m/s^2.

Rezolvare. a) Lucrul mecanic al greutății mingii, în timpul urcării acesteia, este un lucru mecanic rezistent, dat de relația:

$$L_u = -mgh_m = -5 \text{ J}.$$

b) În timpul coborîrii mingii, greutatea acesteia efectuează un lucru mecanic motor

$$L_c = mgh_m = 5 \text{ J}.$$

c) Lucrul mecanic al greutății, pe tot parcursul, este:

$$L = L_u + L_c = -5 \text{ J} + 5 \text{ J} = 0.$$

4.1.6. **Lucrul mecanic al forței elastice.** Am studiat lucrul mecanic al forțelor constante, însă în practică întîlnim foarte des forțe care variază în funcție de poziția corpului asupra căruia ele acționează. Un exemplu de astfel de forță este forța elastică:

$$F = -kx, \tag{4.11}$$

unde k este constanta elastică a resortului și x este deformarea resortului.

Forța elastică este egală și de sens opus forței deformatoare $F_1 = kx$.

În timpul deformării resortului, se deplasează pe distanța x, atît punctul de aplicație al forței deformatoare $\vec{F}_1$ cît și cel al forței elastice $\vec{F}$. Ambele forțe efectuează lucru mecanic. La întindere sau comprimare, lucrul mecanic al forței deformatoare $\vec{F}_1$ este un lucru mecanic motor, pe cînd cel al forței elastice $\vec{F}$ este un lucru mecanic rezistent. Aceste două lucruri mecanice sînt egale și de semn contrar.

Lucrul mecanic L, al unei forțe variabile $F = f(x)$, al cărei punct de aplicație se deplasează pe distanța AB (fig. 4.10, *a* și *b*), este egal cu aria S, a suprafeței limitată de curba $f(x)$, un segment din axa Ox și două ordonate (cele ale punctelor A_1 și B_1). Dacă în intervalul $[a, b]$ $f(x) \geqslant 0$, atunci aria S

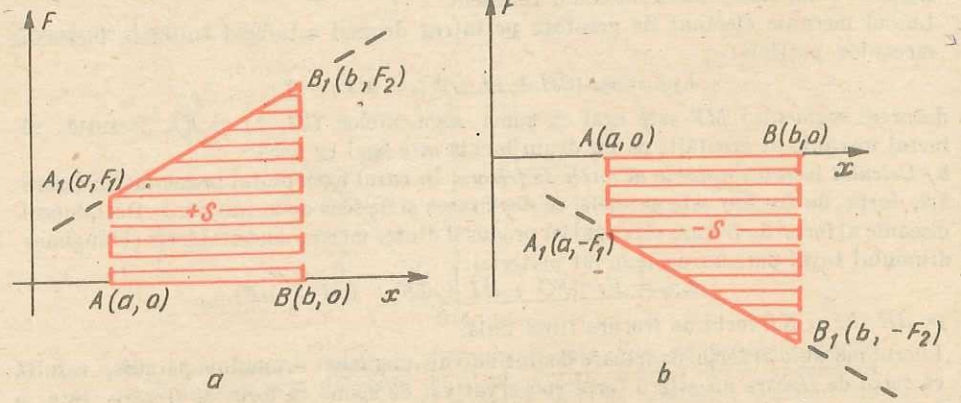


Fig. 4.10. *a)* Aria S este pozitivă dacă se află deasupra axei Ox; *b)* aria S este negativă dacă se află sub axa Ox.

este pozitivă, deci și lucrul mecanic este pozitiv (fig. 4.10, *a*), iar dacă $f(x) \leqslant 0$, atunci aria S este negativă, deci și lucrul mecanic este negativ (fig. 4.10, *b*).

Vom calcula lucrul mecanic al forței elastice $F = -kx$ folosind graficul de variație al acestei forțe în funcție de x, într-un sistem de coordonate FOx (fig. 4.11). Graficul funcției $F = -kx$ este o dreaptă care trece prin originea axelor de coordonate.

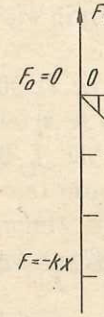


Fig. 4.11. F elastice $F =$ este egal cu

Lucrul mecanic al forței elastice este egal cu aria suprafeței limitată de dreapta $F = -kx$ și segmentele de dreaptă OA și AA_1, deci e unghiului A_1AO:

$$L = \frac{AA_1 \cdot OA}{2} = -\frac{kx \cdot x}{2}.$$

Așadar:

$$L = -\frac{kx^2}{2}.$$

Din relația (4.12) rezultă că lucrul mecanic al forței el de poziția punctului inițial și a celui final al drumului p aplicație al forței. Deci *forța elastică este o forță conservat* riorul resortului constituie un cîmp de forțe conservativ

EXEMPLE

1. O forță, care acționează asupra unui corp, variază în funcție $F = 3x$, unde F este exprimată în newtoni și distanța x în met mecanic efectuat de forță între punctele $A(2, 0)$ și $B(6, 0)$.

Rezolvare. Lucrul mecanic efectuat de forță este egal cu aria suprafeței limitată de dreapta $F = 3x$, de segmentul AB și de ordonatele $F(x_1) = AA_1$ și $F(x_2) = BB_1$ (fig. 4.12). Prin urmare lucrul mecanic al forței $F = 3x$ este egal cu aria trapezului AA_1B_1B:

$$L = \frac{AA_1 + BB_1}{2} AB = \frac{F(x_1) + F(x_2)}{2} (x_2 - x_1) = 48 \text{ J}.$$

Din relația de mai sus rezultă că lucrul mecanic al forței variabile $F = 3x$ poate fi calculat înmulțind media aritmetică a valorilor inițială și finală a forței cu deplasarea punctului de aplicație al forței.

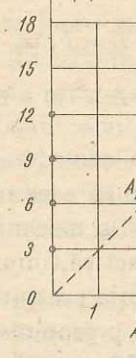


Fig. 4.

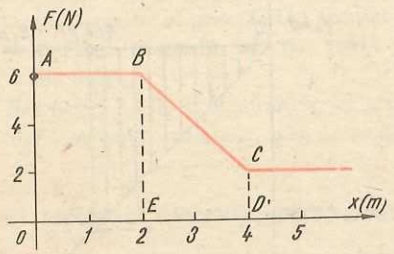


Fig. 4.13. La exemplul 2.

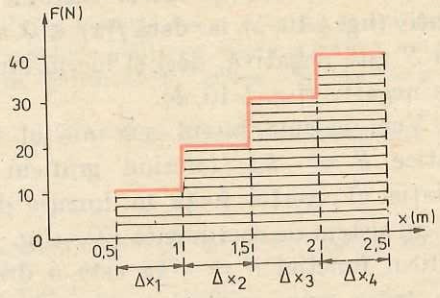


Fig. 4.14. Lucrul mecanic efectuat de forța variabilă F este: $L = \sum_{i}^{n} F_i \Delta x_i$.

2. O forță $\vec{F}$ ce se exercită asupra unui corp variază în funcție de deplasarea punctului său de aplicație după cum se arată în graficul din figura 4.13. Ce lucru mecanic efectuează forța pe intervalul [0 m; 4 m]?

Rezolvare. Lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este egal cu aria suprafeței *OABCDO*. Observăm că această suprafață se compune din: dreptunghiul *OABEO* și trapezul *EBCDE*. Valoarea lucrului mecanic căutat este egală cu suma ariilor dreptunghiului *OABEO* și trapezului *EBCDE*, deci:

$$L = OA \times OE + \frac{(BE + CD)}{2} ED,$$

$$L = 6\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} + \frac{(6\ \text{N} + 2\ \text{N})}{2} \cdot 2\ \text{m} = 20\ \text{J}.$$

3. O forță variabilă F acționează asupra unui punct material, deplasîndu-l pe o anumită distanță Δx. În figura 4.14 este reprezentată variația forței în funcție de distanță, $F = f(x)$. Să se calculeze lucrul mecanic total efectuat de către forța $\vec{F}$, între limitele între care variază x, și care sînt indicate pe figură.

Rezolvare. Lucrul mecanic total este egal cu aria suprafeței hașurate pe figură. Se împarte suprafața hașurată într-un număr de dreptunghiuri, de bază Δx_i, astfel ca pe intervalul Δx_i, forța să fie constantă.

Lucrul mecanic total efectuat de forța $\vec{F}$ este egal cu suma ariilor $F_i \Delta x_i$, a dreptunghiurilor, deci:

$$L = F_1 \Delta x_1 + F_2 \Delta x_2 + F_3 \Delta x_3 + F_4 \Delta x_4,$$

sau

$$L = (10 + 20 + 30 + 40) \cdot 0{,}5 = 50\ \text{J}.$$

4.1.7. **Puterea.** În considerațiile pe care le-am făcut pînă acum nu am ținut seamă de timpul în care o forță efectuează un anumit lucru mecanic. Forța care produce lucrul mecanic se poate datora unui motor sau unei instalații. În activitatea practică, timpul în care o instalație sau un motor efectuează un anumit lucru mecanic prezintă o deosebită importanță.

Spre exemplu, să presupunem că o macara ridică o sarcină de 5 000 N la 2 metri înălțime în 50 secunde, iar alta ridică o sarcină de 8 000 N la 3 metri înălțime în 60 secunde. Se pune întrebarea care di
este mai productivă?

Prima efectuează lucrul mecanic $L_1 = 5\,000$ N
într-o secundă produce un lucru mecanic de 200 J/s.
lucrul mecanic $L_2 = 8\,000\ \text{N} \times 3\ \text{m} = 24\,000$ J, i
lucrul mecanic de 400 J/s. A doua macara este mai p
duce un lucru mecanic mai mare în timp de o secundă
nică decît prima. Puterea este o mărime care caracter
efectuează un lucru mecanic.

Prin definiție, *puterea medie într-un interval de*
raportul dintre lucrul mecanic efectuat și timpul necesar
mecanic:

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t}.$$

Am definit puterea medie deoarece, în general, lucrul m
în mod uniform în timp.

În cazul cînd puterea este constantă, ea este dată

$$P = \frac{L}{t}.$$

Dacă în relația (4.14) se ia $L = 1$ joule și $t = 1$ secu
pentru putere numită watt, cu simbolul W:

$$1\ \text{watt} = \frac{1\ \text{joule}}{1\ \text{secundă}}; \qquad 1\ \text{W} = \frac{1}{1}$$

4.2. ENERGIA CINETICĂ. TEOREMA VARIAȚIEI E
A PUNCTULUI MATERIAL

4.2.1. **Noțiunea de energie.** Energia este o mărime
terizează capacitatea unui corp sau a unui sistem de
lucru mecanic.

Dacă un corp are capacitatea să efectueze lucru
factori mecanici cum ar fi schimbarea poziției lui într-
mației sale sau accelerării sale spunem că posedă *energi*
plu, un corp în cădere poate acționa mecanismul un
în mișcare (fig. 4.15). Apa zăgăzuită de un baraj poat
turbine punînd în funcțiune un gater, o moară sau o h
Resortul comprimat, al unui pistol jucărie, prin destin
la o anumită distanță.

Din exemplele date rezultă că un corp efectueaz
dacă acesta trece dintr-o stare în alta. Astfel, resortul
jucărie efectuează lucru mecanic numai cînd acesta se

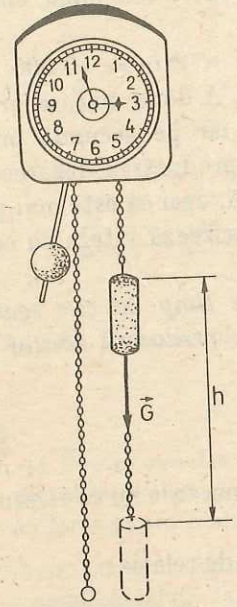


Fig. 4.15. Funcționarea ceasornicului reprezentat în figură este asigurată prin acțiunea unui corp în cădere asupra mecanismului său.

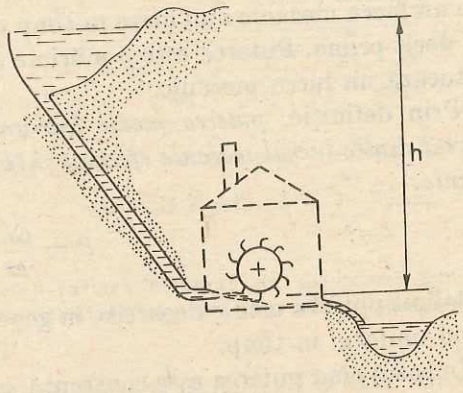


Fig. 4.16. Apa zăgăzuită de barajul unei hidrocentrale are înmagazinată în ea energie. Această apă poate acționa paletele unei turbine producînd un lucru mecanic.

Deoarece energia unui corp (sistem de corpuri) este legată de posibilitatea acestui corp (sistemului de corpuri) de a efectua lucru mecanic, este normal ca energia corpului (sistemului) să scadă cînd el efectuează lucru mecanic asupra altor corpuri și invers, să crească cînd se efectuează lucru mecanic asupra lui.

Fiecărei stări a corpului (sistemului) îi corespunde o energie, pe care o notăm cu E, iar la trecerea corpului (sistemului) din starea A în starea B energia variază cu valoarea:

$$\Delta E = E_B - E_A.$$

Variația ΔE (creșterea sau descreșterea) a energiei este măsurată prin lucrul mecanic efectuat în timpul acestei variații.

Energia este o mărime fizică de stare, caracterizînd corpul (sistemul) într-o stare staționară. Lucrul mecanic caracterizează corpul (sistemul) cînd acesta ia parte la procesul de trecere dintr-o stare A într-o stare B. Deci, lucrul mecanic este o mărime de proces.

Energia mecanică E, pe care o studiem în continuare, are două părți: *energia cinetică* E_c, sau energia de mișcare, și *energia potențială* E_p, numită și energie de poziție sau energie de configurație.

Energia are aceeași unitate de măsură ca și lucrul mecanic (joule; J).

4.2.2. **Energia cinetică a punctului material.** C
energie, deoarece acționînd asupra altor corpuri l
efectueze lucru mecanic.

Energia pe care o posedă un corp datorită mi
sistem de referință dat) se numește *energie cinetic*
corpuri care posedă energie cinetică: vîntul, care
mase de aer, prin acțiunea sa poate pune în mișcar
cu vele, poate smulge copacii din pămînt sau poate
sa depășește o anumită valoare; un ciocan în mișc
introduce într-un material oarecare; o apă curgătoa
transporta pe suprafața sa plute făcute din trun

Energia cinetică a unui corp, este definită pr
trebuie să-l efectueze acest corp din momentul frî
sa, sau prin lucrul mecanic efectuat pentru a-i imp

Să considerăm un punct material în mișcare
sub acțiunea unei forțe $\vec{F}$. Viteza punctului ma
$d = x_2 - x_1$, dintre două puncte A și B de pe
(fig. 4.17). Legătura dintre cele două viteze este d

$$v_2^2 - v_1^2 = 2ad.$$

Înlocuind în (4.15) accelerația a, prin valoare
mentală a dinamicii $F = ma$, obținem:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fd.$$

Termenul Fd reprezintă lucrul mecanic al forț
$- x_1$, deci

$$L_{AB} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Din relația (4.17) rezultă că lucrul mecanic
acționează asupra punctului material a contribuit

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2,$$

numită prin definiție energia cinetică a punctului m

Deci, *energia cinetică a unui corp de masă m
translație cu viteza v, în raport cu un sistem de ref
semiprodusul dintre masa corpului și pătratul vite*

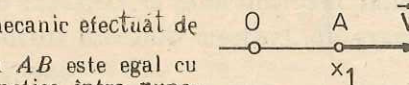


Fig. 4.17. Lucrul mecanic efectuat de forța $\vec{F}$ pe distanța AB este egal cu variația energiei cinetice între punctele A și B.

Relația (4.17) exprimă teorema variației energiei cinetice pe care o enunțăm astfel:

variația energiei cinetice a unui punct material, care se deplasează în raport cu un sistem de referință inerțial, este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța rezultantă care acționează asupra punctului material în timpul acestei variații.

În concluzie, putem spune că energia cinetică a punctului material este o mărime care caracterizează mișcarea sa mecanică. Fiecărei stări de mișcare a punctului material îi corespunde o energie cinetică, iar la trecerea punctului material dintr-o stare de mișcare (*1*) într-o altă stare de mișcare (*2*) energia lui cinetică variază cu valoarea:

$$\Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}.$$

Modificarea stării de mișcare a punctului material se datorează forței rezultante care acționează asupra lui. Înseamnă că lucrul mecanic L al forței rezultante este o măsură a efectelor acestei forțe în procesele de modificare a stării de mișcare. Deci, lucrul mecanic al forței rezultante este egal cu variația energiei cinetice a punctului material:

$$L = E_{c2} - E_{c1}. \tag{4.19}$$

EXEMPLE

1. Un om deplasează un corp cu masa $m = 50$ kg, pe o suprafață orizontală cu viteza $v = 0{,}8$ m/s (fig. 4.18). Coeficientul de frecare dintre corp și suprafața orizontală este $\mu = 0{,}1$. Să se calculeze:
a) forța de tracțiune exercitată de om asupra corpului, aplicînd teorema variației energiei cinetice;
b) puterea medie dezvoltată de om. Se dă $g = 10$ m/s².

Rezolvare. a) Lucrul mecanic rezultant, efectuat de forțele $\vec{F}, \vec{F}_f, \vec{N}$ și $\vec{G}$ care acționează asupra corpului, este o măsură a efectelor forțelor, pentru procesele însoțite de schimbarea vitezei corpului. Cum viteza corpului nu se modifică, lucrul mecanic rezultant este nul:

$$L = (\vec{F} + \vec{F}_f + \vec{G} + \vec{N}) \cdot \vec{d} = Fd - F_f d = 0. \tag{4.20}$$

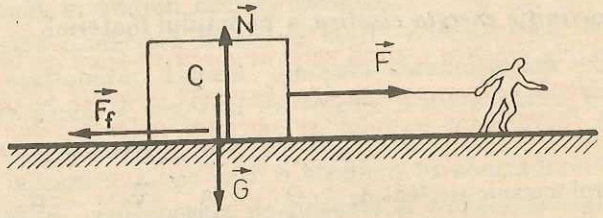


Fig. 4.18. La problema rezolvată.

Din relația (4.20) rezultă că lucrul mecanic al forței $\vec{F}$ este egal cu lucrul mecanic al forței $\vec{F}_f$ și de semn contrar. Aceste lucruri mecanice sînt însoțite de modificarea poziției corpului. Cum corpul se deplasează, lucrurile mecanice sînt diferite de zero. Din relația (4.20) obținem

$$F = F_f = \mu mg = 50 \text{ N}.$$

b) Puterea medie este dată de relația

$$P = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{F \Delta x}{\Delta t} = F v_m.$$

Deoarece viteza este constantă, rezultă

$$P = Fv = 50 \cdot 0{,}8 = 40 \text{ W}.$$

2. Un automobil cu masa de 1 000 kg pornește din repaus și după ce parcurge 500 m, pe un drum orizontal. Să se calculeze lucrul mecanic al motorului, dacă forța de frecare este de 200 N.

Rezolvare. Asupra automobilului acționează forțele: greutatea $\vec{G}$, reacțiunea normală $\vec{N}$, forța de tracțiune $\vec{F}$ și forța de frecare $\vec{F}_f$. Suma algebrică a lucrurilor mecanice ale forțelor ce acționează asupra automobilului pe distanța d este

$$\Sigma L_i = Fd - F_f d.$$

Acest lucru mecanic fiind diferit de zero, el este folosit la mișcarea automobilului.
Aplicînd teorema variației energiei cinetice, obținem:

$$\frac{1}{2} mv^2 - 0 = (F - F_f)d,$$

de unde

$$F = \frac{mv^2}{2d} + F_f = 1\,100 \text{ N}.$$

4.3. ENERGIA POTENȚIALĂ A PUNCTULUI MATERIAL ÎN CÎMP CONSERVATIV DE FORȚE. ENERGIA MECANICĂ A PUNCTULUI MATERIAL ÎN CÎMP CONSERVATIV

4.3.1. Energia potențială a punctului material

Considerăm un punct material de masă m plasat într-un cîmp gravitațional al Pămîntului considerat uniform (fig. 4.19) și Pămîntul, care interacționează prin cîmpul gravitațional, formează un sistem fizic deformabil în cadrul căruia acționează numai forțele de greutate). Configurația sistemului (starea sistemului) este determinată de înălțimea h a punctului material față de un nivel de referință, suprafața Pămîntului, luat ca nivel de referință. Spunem că h este un parametru de stare al sistemului.

Lăsăm punctul material să cadă liber din punctul A situat la înălțimea h_0. Lucrul mecanic efectuat de greutate pe distanța $h - h_0$ este

$$L = mg(h - h_0).$$

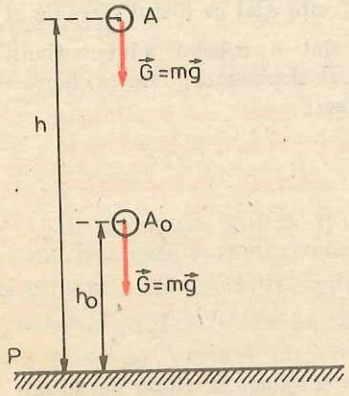


Fig. 4.19. Variația energiei potențiale a sistemului Pământ-punct material, pentru deplasarea punctului material din A în A_0 este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic efectuat de greutate pe distanța AA_0: $\Delta E_p = -mg(h - h_0)$.

Astfel punctul material apropiindu-se de Pământ poate efectua un lucru mecanic. Din acest motiv noi spunem că sistemul alcătuit din Pământ și punctul material — sistem deformabil (cu interacțiune gravitațională) — posedă energie. Această energie, care depinde de poziția punctului material față de Pământ, se numește energie de poziție sau *energie potențială gravitațională.*

Cu toate că energia potențială caracterizează starea sistemului Pământ-punct material, datorită unei comodități de exprimare se spune adesea: energia potențială gravitațională a punctului material, lăsînd impresia că se face abstracție de rolul esențial al Pământului care generează cîmpul gravitațional.

Fiecărei configurații (stări) a sistemului îi corespunde o energie potențială E_p, iar modificarea configurației sistemului determină variația energiei potențiale. Astfel, dacă punctul material se deplasează din poziția inițială A, de altitudine h, în poziția finală A_0 de altitudine h_0 (fig. 4.19), energia potențială a sistemului suferă variația:

$$\Delta E_p = E_{p0} - E_p. \tag{4.22}$$

Energia potențială E_p a sistemului nu se poate determina în mod absolut, se pot măsura variațiile acestei energii, prin lucrul mecanic efectuat de către forțele de greutate.

Prin convenție, variația energiei potențiale între două stări (configurații date) este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al forțelor de greutate, exercitate asupra punctului material, între aceste stări, deci:

$$\Delta E_p = E_{p0} - E_p = -mg(h - h_0), \tag{4.23}$$

sau

$$E_{p0} - E_p = mgh_0 - mgh.$$

Dacă se alege starea căreia îi corespunde parametrul $h_0 = 0$, ca stare de referință și căreia i se atribuie energia potențială E_{p0}, atunci energia potențială a sistemului în starea corespunzătoare parametrului h va fi dată de relația:

$$E_p = mgh + E_{p0}. \tag{4.24}$$

Din relația (4.24) rezultă că energia potențială nu este total determinată, ea este determinată pînă la constanta arbitrară aditivă E_{p0}, căreia i se poate da în mod convențional valoarea zero. În acest caz

$$E_p = mgh. \tag{4.25}$$

Configurația (starea) pentru care s-a convenit să se ia energia potențială a sistemului egală cu zero $E_{p0} = 0$ se numește configurație zero (starea zero).

Alegerea configurației zero, adică a nivelului de r
potențială, este cu totul arbitrară. În rezolvarea pr
configurație zero acea configurație în care energia pote
minimă și căreia i se atribuie în mod convențional val

EXEMPLE

1. În figura 4.20 se prezintă o porțiune a cîmpului gravitațion
nete. Se indică, de asemenea, valoarea energiei potențiale,
ale sistemului alcătuit dintr-un corp cu masa $m = 2$ kg și
netă cu interacțiune gravitațională).
Să se calculeze:
a) lucrul mecanic necesar deplasării corpului din punctul
constantă;
b) lucrul mecanic al greutății cînd corpul cade liber din pu
planetei;
c) lucrul mecanic al greutății, efectuat în timpul deplasări
stantă, din punctul A în punctul D.

Rezolvare. a) Lucrul mecanic efectuat de forța externă si
corpul din A în B, este egal și de semn contrar cu lucrul
la rîndul său este egal și de semn contrar cu diferența dint
stările B și A, deci:

$$L_{AB} = -L_{G(AB)} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -$$

Pentru deplasarea corpului din A în B s-a cheltuit un lucru
energia potențială a sistemului a crescut cu 6 J.
b) Lucrul mecanic al greutății pe distanța CO este egal și de
energiilor potențiale din stările O (sol) și C:

$$L_{G(CO)} = -(E_{pO} - E_{pC}) = -(0 - 8\ \text{J}) =$$

Prin deplasarea corpului din C în O, energia potențială a si
c) Putem deplasa corpul din A în B pe unul din drumurile
figura 4.21. Greutatea fiind o forță conservativă, lucrul său
drum. Indiferent ce drum am urma, pentru deplasarea cor
mecanic al greutății este același. Alegînd drumul 1, adică dru
căutat este:

$$L_{G(AD)} = L_{G(AB)} + L_{G(BD)} = 6\ \text{J} + 0 =$$

Pe distanța BD greutatea nu efectuează lucru mecanic de
dintre B și D este nulă.

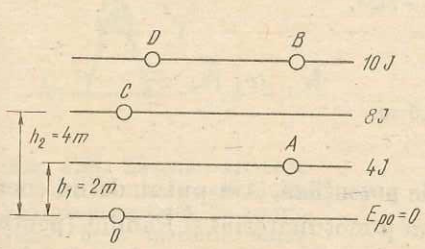


Fig. 4.20. La exemplul 1.

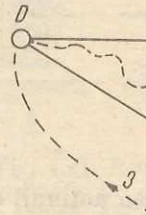


Fig. 4.

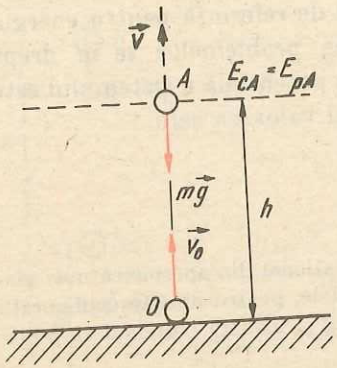


Fig. 4.22. La exemplul 3.

2. Un corp cu masa $m = 3$ kg cade liber de la înălțimea $h = 5$ m. Să se calculeze energia cinetică a corpului și energia potențială a sistemului corp-Pământ, cînd corpul se află la înălțimea $h_1 = 2$ m deasupra Pământului. Se va lua $g = 10$ m/s².

Rezolvare. Energia cinetică la înălțimea h_1 este:

$$E_c = \frac{mv_1^2}{2}, \text{ unde } v_1^2 = 2g(h - h_1),$$

deci

$$E_c = mg(h - h_1) = 90 \text{ J}.$$

Energia potențială a sistemului, cînd corpul se află la înălțimea h_1 față de Pământ, este:

$$E_p = mgh_1 = 60 \text{ J}.$$

Am considerat suprafața Pământului nivel zero pentru energia potențială.

3. Un corp este aruncat pe verticală în sus cu viteza $v_0 = 10$ m/s. La ce înălțime energia cinetică a corpului este egală cu energia potențială a sistemului corp-Pământ? Se va lua $g = 10$ m/s².

Rezolvare. a) Vom considera nivelul zero pentru energia potențială suprafața Pământului și nivelul la care energia cinetică este egală cu energia potențială, nivelul corespunzător punctului A (fig. 4.22).

Deci

$$E_{pA} = E_{cA} = \frac{mv^2}{2}. \tag{4.26}$$

Variația energiei potențiale între nivelele A și O (sol) este egală și de semn contrar cu lucrul mecanic al greutății pe distanța OA, deci:

$$E_{pA} - E_{pO} = - L_{G(OA)} = -(- mgh). \tag{4.27}$$

Am luat $L_G = -mgh$, deoarece L_G este un lucru mecanic rezistent.
Avînd în vedere relațiile (4.26) și (4.27), obținem:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}. \tag{4.28}$$

Variația energiei cinetice pe distanța OA este egală cu lucrul mecanic al greutății pe această distanță:

$$E_{cA} - E_{cO} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh. \tag{4.29}$$

Comparînd relațiile (4.28) și (4.29), obținem:

$$mgh - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh,$$

de unde

$$h = \frac{v_0^2}{4g} = 2{,}5 \text{ m}.$$

4.3.2. **Generalizarea noțiunii de energie potențială.** Am putut defini energia potențială a sistemului alcătuit dintr-un punct material și Pământ (pentru deplasări mici cînd cîmpul gravitațional este uniform) numai datorită faptului că sistemului acționează forțe conservative (forțele de greu-

tate). Deci, se poate defini energia potențială a oricăr
nează forțe conservative: forțe gravitaționale; forțe e
mării temporare a unui solid; forțe electrostatice; f
exercită între magneți permanenți.

**Lucrul mecanic efectuat de către forțele conserva
sistem este egal și de semn opus cu variația energ**

$$L = -(E_{p2} - E_{p1}) = E_{p1} - E_{p}$$

unde E_{p1} este energia potențială a sistemului în stare in
potențială a sistemului în stare finală.

În cazul sistemelor în care acționează forțe neco
defini o energie potențială. Spre exemplu, în sistem
forțele de presiune dintr-un gaz, forțe electromagne

4.3.3. **Energia potențială în cîmpul forțelor elasti**
arcaș care și-a încordat arcul (fig. 4.23). Pe coarda în
jină o săgeată. Sistemul arc-săgeată are înmagazinat
nică, numită energie potențială elastică. Acest sistem
un lucru mecanic în momentul cînd se dă drumul cor
spre țintă. Deci cînd sistemul își modifică configurați

Să comprimăm un resort și să așezăm apoi pe el u
resortul este lăsat liber, el se destinde și se lanseaz
lucru mecanic. Deci, resortul comprimat (același luc
întins) posedă energie potențială elastică.

Energia potențială de deformare a unui corp elas
gia potențială a unui resort elastic, depinde de poziț
părți ale acestui corp.

Variația energiei potențiale elastice a resortului
contrar cu lucrul mecanic al forțelor elastice. Deci,
obținem:

$$E_p = \frac{kx^2}{2}.$$

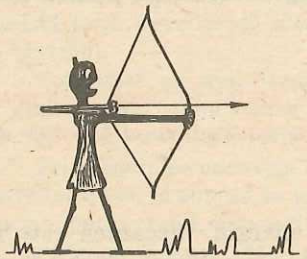


Fig. 4.23. Sistemul arc-coardă are înmagazinată în el energie potențială. Se va produce lucru mecanic numai dacă se dă drumul corzii care va arunca săgeata din arc.

Fig. 4.24. Res
gazinată în e
resortul este
și lansează co
efect

4.3.4. **Energia mecanică a punctului material în cîmp conservativ de forţe.** Fie un sistem alcătuit dintr-un punct material şi un alt corp (presupus fix), interacţionînd printr-un cîmp de forţe conservativ (spre exemplu cîmpul gravitaţional). Presupunem că asupra sistemului nu acţionează forţe provenind de la alte sisteme, adică, sistemul este izolat.

Considerăm că punctul material se deplasează în cîmp sub acţiunea forţelor cîmpului. În timpul deplasării punctului material se produce o variaţie continuă atît a energiei cinetice cît şi a energiei potenţiale a sistemului. Astfel la momentul $t_0 = 0$, sistemul posedă energia cinetică E_{c0} şi energia potenţială E_{p0}, iar la momentul t posedă energia cinetică E_c şi energia potenţială E_p.

Conform teoremei variaţiei energiei cinetice $L = E_c - E_{c0}$ şi a definiţiei energiei potenţiale $L = -(E_p - E_{p0})$, unde L este lucrul mecanic al forţei rezultante aplicată punctului material în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$, deci:

$$L = E_c - E_{c0} = -(E_p - E_{p0}),$$

de unde

$$E_c + E_p = E_{c0} + E_{p0}. \tag{4.31}$$

Din relaţia (4.31) rezultă că în timpul modificării configuraţiei unui sistem fizic izolat, în care acţionează forţe conservative, suma

$$E = E_p + E_c, \tag{4.32}$$

numită *energia mecanică* a sistemului, are o valoare constantă pentru orice stare (configuraţie) a sistemului.

4.4. CONSERVAREA ENERGIEI MECANICE

Relaţia (4.31) reprezintă legea conservării energiei mecanice pentru forţe conservative, care se enunţă astfel:

energia mecanică, $E = E_c + E_p$, a unui sistem izolat în care acţionează forţe conservative este constantă, deci energia mecanică a acestui sistem se conservă.

Condiţia necesară pentru ca să se conserve energia mecanică este ca asupra punctului material, respectiv în sistem, să nu acţioneze nici o forţă neconservativă. Aceasta implică ca forţele de frecare să fie nule, iar sistemul să nu cuprindă maşini termice sau maşini electrice.

4.4.1. **Conservarea energiei mecanice în mişcarea de cădere liberă.** Fie un punct material de masă m, plasat într-un punct A din cîmpul gravitaţional uniform al Pămîntului. Considerăm sistemul fizic Pămînt-punct material,

Energia mecanică a sistemului, cînd punct material se află în punctul A, este

$$E_A = E_{pA} + E_{cA} = mgh,$$

deoarece $E_{cA} = 0$, punctul material fiind imobil în (fig. 4.25).

În A se lasă punctul material să cadă libe el ajunge în punctul B cu viteza

$$v_B = \sqrt{2gx},$$

unde $x = AB$.

Energia mecanică a sistemului, cînd punct material se află în B, este

$$E_B = E_{pB} + E_{cB} = mg(h - x) + mgx = mgh,$$

deoarece $E_{cB} = \frac{mv_B^2}{2} = mgx$.

Energia mecanică a sistemului este constantă în timpu tului material. În timpul acestei mişcări variază atî energia potenţială a sistemului.

4.5. SISTEME DE PUNCTE MATERI FORŢE INTERNE ŞI FORŢE EXTE

4.5.1. **Sistem mecanic.** Corpurile şi sistemele de corpuri din punct de vedere al echilibrului şi al mişcărilor lor relative vedere al interacţiunilor care influenţează aceste mişcări, ca între care, în general, se exercită anumite forţe de interacţi solar poate fi considerat în primă aproximaţie ca un sistem de şi Soarele ale căror dimensiuni sînt mici în comparaţie cu care se exercită forţele de interacţiune gravitaţionale. Un at un sistem de particule (nucleu şi electroni) considerate punc exercită forţe electrice de atracţie (nucleu — electroni) sau — electron).

Tot astfel, un corp oarecare poate fi descompus mintal de elemente de volum foarte mici care pot fi aproximate pri ximaţia este bună dacă luăm aceste elemente de volum sufic

Prin *sistem mecanic* vom înţelege un *sistem de puncte mat* dente între ele, ci supuse la legături reciproce, astfel că forme sau mai puţin stabil, mai mult sau mai puţin deformabil.

Sistemul mecanic este un *model al realităţii* care reflectă exact proprietăţile mecanice ale corpurilor reale.

4.5.2. **Sistem material.** Mai general, prin sistem materia din Univers, bine delimitată fie prin frontiere naturale fie mi şi o studiem la un moment dat.

Astfel, un sistem material poate fi: o planetă, o piatră vas, sistemul de corpuri reprezentat în figura 4.26, alcătuit d capetele unui fir trecut peste un scripete etc.

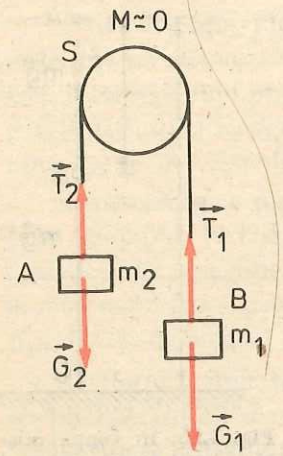


Fig. 4.26. Sistemul material este alcătuit din corpurile A și B legate de capetele unui fir trecut peste un scripete cu masa neglijabilă. Asupra sistemului acționează forțele externe $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ și forțele interne $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$.

Sistemul material este deformabil dacă distanțele dintre părțile sale componente sînt variabile. De exemplu un resort, sistemul solar, sistemul reprezentat în figura 4.26.

Sistemul material este nedeformabil sau rigid dacă distanțele reciproce dintre elementele care îl alcătuiesc nu se modifică în procesul mișcării mecanice.

4.5.3. **Forțe externe.** Odată sistemul ales și bine precizat, interacțiunea cu restul Universului este luată în considerare prin forțele exercitate de acesta, numite *forțe externe*.

Forțele externe sînt forțele exercitate asupra sistemului din partea corpurilor exterioare care nu fac parte din sistemul considerat.

Vom nota forțele interne cu litera $\vec{\mathcal{F}}$ rond cu indici, de exemplu, dacă considerăm sistemul Luna — Pămînt supus atracției Soarelui (fig. 4.27), atunci prin $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ am reprezentat rezultantele forțelor externe care se exercită asupra Lunii, respectiv Pămîntului.

4.5.4. **Forțe interne.** Asupra fiecărei particule (părți) din sistem se exercită atît forțe externe din partea corpurilor care nu fac parte din sistem cît și forțe interne din partea tuturor celorlalte particule (părți) din sistem.

Vom nota forțele interne cu litera $\vec{\mathcal{F}}$ rond, cu indici.

Forțele interne sînt forțele de interacțiune dintre punctele materiale (părțile) ale sistemului considerat.

Să analizăm din nou sistemul Lună — Pămînt (fig. 4.27), în care am notat cu $\vec{\mathcal{F}}_{12}$, $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ forțele interne. Forța $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ este forța exercitată de Pămînt asupra Lunii, iar $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ este forța exercitată de Lună asupra Pămîntului. Conform principiului al treilea al dinamicii forțele interne $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ și $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ sînt egale în modul și de sens opus:

$$\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21};\quad \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0.$$

Rezultanta tuturor forțelor interne din sistem este nulă.

4.5.5. **Teorema variației energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale.** Pentru un punct material, energia cinetică are expresia

$$E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

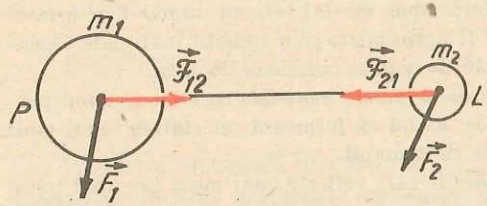


Fig. 4.27. Forțele interne care se exercită între punctele materiale ale unui sistem mecanic sînt două cîte două egale în modul și de sens opus (acțiunea și reacțiunea) $\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21}$, de aceea rezultanta lor este nulă: $\vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0$.

Pentru un sistem de puncte materiale, energia cinetică este egală cu suma energiilor cinetice ale tuturor punctelor din sistem:

$$E_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2. \qquad (4.33)$$

Vom enunța, fără a o demonstra, teorema variației energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale.

Între două momente date (t_1 și t_2) variația energiei cine materiale este egală cu suma lucrurilor mecanice ale tuturor forțe rioare, care acționează asupra punctelor materiale din sistem.

$$E_{c2} - E_{c1} = L_{int.} + L_{ext.}.$$

În cazul sistemului deformabil, lucrul mecanic al forțelo diferit de zero.

În cazul unui solid indeformabil, lucrul mecanic al f cu zero.

Variația energiei cinetice a unui solid indeformabil înt egală cu suma lucrurilor mecanice efectuate între aceste mo exterioare care acționează asupra solidului.

PROBLEME REZOLVATE

1. Un punct material de masă m alunecă fără frecare pe o sup Să se determine viteza punctului material în punctul B, viteză inițială.

Rezolvare. Sistemul alcătuit din punctul material și Pămînt gravitațional) este acționat numai de forțe conservative. mului în starea A este egală cu energia mecanică a sistem

$$\frac{mv_A^2}{2} + E_{pA} = \frac{mv_B^2}{2} + E_{pB}.$$

Luînd nivelul B, ca nivel de referință pentru energia potenț seamă că $v_A = 0$, obținem:

$$mgh = \frac{1}{2} mv_B^2,$$

deci

$$v_B = \sqrt{2gh}.$$

2. Un corp de masă $m = 1$ kg este lăsat să cadă liber de la înă cu constanta elastică $k = 200$ N/m (fig. 4.29). Să se calc ciocnește resortul și deformarea x a resortului.

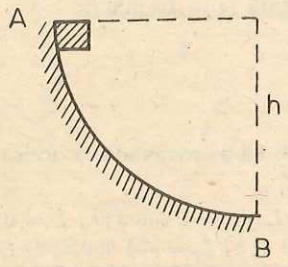


Fig. 4.28. La problema rezolvată 1.

Fig.

Rezolvare. În sistemul alcătuit din corp, resort și Pământ acționează două forțe conservative: forța de greutate și forța elastică. Considerăm ca nivele de referință, nivelul B pentru energia potențială elastică și nivelul C pentru energia potențială gravitațională.

Energia mecanică totală la nivelele A, B și C este:

$$E_A = mg(h + x);\ E_B = mgx + \frac{1}{2}mv^2;\ E_C = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (4.35)$$

Sistemul fiind izolat aceste energii mecanice sînt egale.

Pentru calculul vitezei la nivelul B folosim primele două relații (4.35) și obținem:

$$mg(h + x) = mgx + \frac{1}{2}mv^2,$$

de unde

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Pentru calculul vitezei vom considera $g = 10$ m/s².

$$v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 2} = 6{,}32 \text{ m/s}.$$

Pentru calculul deformării x a resortului vom folosi prima și ultima relație (4.35) și obținem:

$$mg(h + x) = \frac{1}{2}kx^2,$$

sau

$$10x^2 - x - 2 = 0,$$

de unde

$$x = 0{,}5 \text{ m}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Ce lucru mecanic efectuează forța centripetă în timpul unei rotații complete, într-o mișcare circulară uniformă?

   R: $L = 0, (\vec{F} \perp \vec{v})$.

2. Un corp se deplasează cu o viteză constantă pe un drum orizontal. Forța rezultantă care acționează asupra corpului este nulă. Se efectuează lucru mecanic asupra corpului? Justificați răspunsul.

3. Un om deplasează pe o suprafață orizontală, pe distanța $d = 10$ m, o ladă cu masa $m = 100$ kg. Coeficientul de frecare dintre ladă și suprafața pe care se deplasează este $\mu = 0{,}4$. Forța de tracțiune are direcția orizontală ($g = 10$ m/s²).

   1° Se presupune viteza constantă. Să se calculeze:

   a) lucrul mecanic efectuat de om asupra lăzii;

   b) lucrul mecanic al forței de frecare;

   c) lucrul mecanic total efectuat asupra lăzii.

   2° Se presupune că lada are acceleràția $a = 0{,}5$ m/s². Să se răspundă la aceleași întrebări ale punctului 1°.

   R: 1° *a)* $L_0 = \mu mgd = 4\,000$ J; *b)* $L_r = -4\,000$ J; *c)* $L = 0$;

   2° *a)* $L_0 = (\mu mg + ma)d = 4\,500$ J; *b)* $L_r = -4\,000$ J; *c)* $L = 500$ J.

4. Un corp cu masa $m = 20$ kg se deplasează cu viteză constantă pe distanța $d = 60$ m, pe o suprafață orizontală. Coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}45$. Forța aplicată corpului face un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala. Să se calculeze:

   a) forța aplicată corpului;

   b) lucrul mecanic efectuat de forța de tracțiune asupra

   R: *a)* $F = \dfrac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha} \approx 83$ N,

5. Asupra unui corp acționează o forță $F = 24$ N, care fac
   zontala. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forța
   Frecările sînt neglijabile ($\cos 37° = 0{,}8$).

6. Doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ au mărimile, respectiv $a = 4$ unități co
   convenționale. Să se calculeze produsul scalar al celor doi ve
   dintre cei doi vectori valorile: $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \pi$.

   R: 32, $16\sqrt{3}$, $16\sqrt{2}$, 0, -1. (În unități conv

7. Să se demonstreze că produsul scalar a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ se
   $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y,$$
   unde (a_x, a_y) și (b_x, b_y) sînt componentele vectorilor pe dou
   diculare Ox, Oy situate în planul determinat de cei 2 vec

8. Să se efectueze produsul scalar al vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ reprezen
   Mărimile vectorilor sînt indicate pe grafic în unități co

   R: *a)* 4,24; *b)* $-4{,}596$; *c)* -6 (În unități conv

9. O macara ridică un corp cu masa $m = 300$ kg la înălțime
   lucrul mecanic efectuat de macara în cazurile următoare:
   a) corpul este ridicat cu viteză constantă;
   b) corpul este ridicat cu acceleraţia $a = 2$ m/s² ($g = 10$ m/

   R: *a)* $L = mgh = 15 \cdot 10^3$ J; *b)* L

10. Un copil aruncă o minge cu masa $m = 100$ g care se urcă
    se calculeze lucrul mecanic al greutății mingii. Se va l

11. Un corp cu masa m se deplasează dintr-un punct A într-u
    tațional terestru, pe traseul ABC, indicat în figura 4.31.
    mecanic efectuat de greutate este egal cu zero.

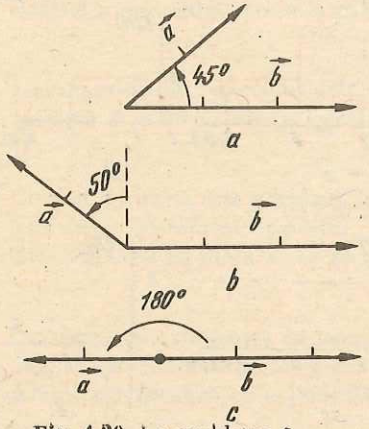


Fig. 4.30. La problema 8.

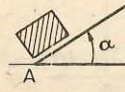


Fig. 4

12. În timp ce un alpinist escaladează peretele vertical al unui munte, un turist de aceeași greutate ca și alpinistul urcă în vîrful muntelui pe o cărare în serpentină și ajunge în același loc ca și alpinistul. Care dintre cei doi a efectuat un lucru mecanic mai mare împotriva gravitației?

R: Efectuează același lucru mecanic.

13. În figura 4.32 este reprezentată dependența alungirii unui resort de mărimea forței deformatoare. Să se calculeze lucrul mecanic al forței deformatoare între punctele de abscise 0 cm și 8 cm. Să se spună care este sensul fizic al tangentei unghiului α și al ariei triunghiului de sub segmentul OA de pe grafic.

R: $\operatorname{tg}\alpha = k$, $L = Fx/2 = 32$ J.

14. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a întinde, cu $\Delta l = 0{,}5$ cm, un resort cu constanta elastică $k = 40$ kN/m?

R: $L = k(\Delta l)^2/2 = 0{,}5$ J.

15. Pentru a întinde un resort cu $\Delta l_1 = 4$ mm, trebuie să se efectueze un lucru mecanic $L_1 = 0{,}02$ J. Ce lucru mecanic trebuie efectuat pentru a întinde resortul cu $\Delta l_2 = 4$ cm?

R: $L_2 = L_1(\Delta l_2/\Delta l_1)^2 = 2$ J.

16. Un motor cu puterea $P = 10$ kW este folosit pentru a ridica o sarcină cu masa $m = 500$ kg la înălțimea $h = 40$ m. În cît timp va ridica motorul sarcina respectivă? ($g = 10$ m/s^2.)

R: $t = mgh/P = 20$ s.

17. În figurile 4.33, *a*, *b*, *c* și *d* sînt reprezentate dependențele de distanță ale forței F care acționează asupra unui corp. Să se calculeze lucrul mecanic al forței în fiecare caz.

R: *a)* 180 J; *b)* 60 J; *c)* 150 J; *d)* 2,5 J.

18. Să se calculeze puterea minimă a unui automobil pentru a se deplasa cu viteza constantă $v = 100$ km/h, dacă forța de frecare care acționează asupra automobilului este $F_f = 1{,}8 \cdot 10^3$ N.

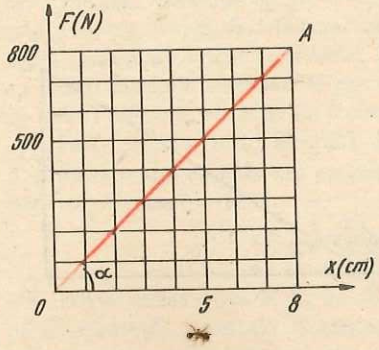
R: $P = F_f v = 5 \cdot 10^4$ W.

19. Punctul de aplicație al unei forțe $F = 2{,}35$ N se deplasează cu viteză constantă $v = 0{,}456$ m/s, pe direcția forței. Care este puterea pusă în joc în această deplasare?

R: $P = Fv = 1{,}07$ W.

20. Depinde energia cinetică de sistemul de referință în raport cu care se calculează?

R: Da.



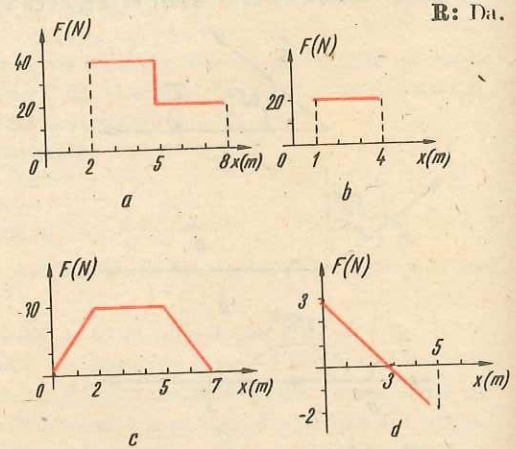


Fig. 4.33. La problema 17.

21. Un om stă pe o bancă într-un autobus care se deplasează cu viteza $v = 15$ m/s. Masa omului este $m = 70$ kg. Care este energia cinetică a omului în raport cu ceilalți pasageri? Dar în raport cu Pămîntul?

Fig.

R: $E_{1c} = 0$; $E_{2c} = 7\,875$ J.

22. Un corp cu masa $m = 0{,}5$ kg este aruncat vertical în sus cu viteza $v_0 = 4$ m/s. Să se calculeze: lucrul mecanic al greutății, variația energiei potențiale și variația energiei cinetice la urcarea maximă.

R: $L_G = -mv_0^2/2 = -4$ J;

23. O săgeată cu masa $m = 50$ g este lansată, dintr-un arc, cu
ticală în sus. Să se calculeze energia cinetică și energia p
timp $t = 2$ s de la lansare. Se va lua $g = 10$ m/s^2.

R: $E_p = mg(v_0 t - gt^2/2) = 20$ J;

24. Un corp cu masa $m = 2$ kg se deplasează din punctul P_1
vitațional uniform, în care g este constant și egal cu 10 m

a) Să se calculeze lucrul mecanic al greutății pe traiecto

b) Dacă se presupune energia potențială a sistemului co
va fi valoarea sa în P_2?

c) Ce valoare are lucrul mecanic efectuat de cîmp pe traie

d) Care este valoarea energiei potențiale în punctul d
$y = 3$ m?

R: $L_1 = -40$ J; $L_2 = -40$ J; *b)*

25. Cu cît trebuie alungit un resort cu constanta elastică $k =$
înmagazinată în resort să fie $E_p = 14{,}4$ J?

26. Un corp cu masa $m = 2$ kg alunecă pe o suprafață oriz
ciocnește un resort pe care-l comprimă cu $x = 0{,}5$ m, îna
elastică a resortului este $k = 20$ N/m. Care este viteza c

27. La comprimarea resortului unui pistol jucărie cu $x = 3$
maximă $F = 20$ N. Să se calculeze energia potențială a

28. Un pistol jucărie este prevăzut cu un resort de constantă
încărcarea pistolului, resortul a fost comprimat cu x
lansat glonțul cu masa $m = 20$ g, pe direcția orizontală?

29. Un vagon de cale ferată cu masa $m = 20$ tone ciocnește
$= 0{,}2$ m/s. Resorturile tampoanelor se comprimă fiecare
mine forța maximă ce acționează asupra resorturilor.

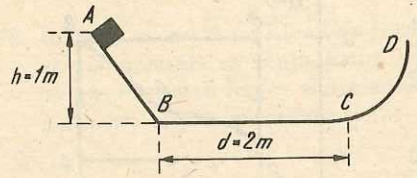


Fig. 4.35. La problema 31.

30. Asupra unui corp acționează o forță care variază cu distanța după legea: $F = 50 - 0{,}5\ x$, unde x este exprimat în metri și F în newtoni. Să se calculeze lucrul mecanic al forței, cînd punctul său de aplicație se deplasează între punctele de abscise $x_0 = 0$ m și $x = 20$ m.

R: $L = \dfrac{F(x) + F(x_0)}{2}(x - x_0) = 900$ J.

31. Un corp cu masa m ($= 2$ kg) coboară fără frecare pe un plan înclinat de înălțime $h = 1$ m. Ajungînd la baza planului, corpul se deplasează cu frecare pe o suprafață plană pînă într-un punct C, parcurgînd distanța $d = 2$ m. Coeficientul de frecare este $\mu = 0{,}3$. În punctul C, corpul urcă fără frecare, pe o suprafață curbă CD (fig. 4.35). Să se calculeze:

a) viteza v_1 a corpului la baza planului înclinat;

b) viteza v_2 a corpului în punctul C;

c) înălțimea h_1 la care urcă corpul pe suprafața CD.

d) Să se determine poziția punctului în care se oprește corpul (pe suprafața plană), față de punctul B. Se va lua $g = 9{,}8$ m/s^2.

R: *a)* $v_1 = \sqrt{2gh} = 4{,}47$ m/s; *b)* $v_2 = \sqrt{2g(h - \mu d)} = 2{,}8$ m/s;
c) $h_1 = h - \mu d = 0{,}4$ m; *d)* $d_1 = 2d - h/\mu = 0{,}66$ m față de B.

5

IMPULSUL MECANIC

Am definit impulsul punctului material în § 2.3. el are direcția și sensul vectorului viteză, iar variația reprezintă forța: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ (lex secunda).

5.1. TEOREMA IMPULSULUI PENTRU PUN CONSERVAREA IMPULSULUI

Să transcriem ecuația (2.12) $\vec{F}_m = \Delta\vec{p}/\Delta t$ s

$\vec{F}_m\ \Delta t = \Delta\vec{p}$ sau $\vec{F}_m(t_2 - t_1) = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$

Produsul $\vec{H} = \vec{F}_m \Delta t$ se numește *impulsul forței*. Ecua *impulsului* pentru punctul material:

Variația impulsului punctului material este eg aplicate punctului material.

Dacă impulsul forței aplicate este zero, de exem este nulă, adică punctul material este *izolat* ($\vec{F} \equiv 0$, $\vec{H}$ va fi nulă: $\Delta\vec{p} = 0$, deci impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$ rămîne n

Impulsul unui punct material izolat se conservă, $\vec{p}$ *material izolat se mișcă rectiliniu uniform sau este în* sisteme de referință inerțiale).

Impulsul se poate schimba numai sub acțiunea

În procesul interacțiunii realizat prin intermediul de mișcare de la un corp la altul, măsurat prin transf gie cinetică, adică prin impulsul forței egal cu variaț

respectiv prin lucrul mecanic al forței, egal cu variația de energie cinetică a corpului.

Impulsul este o măsură a mișcării. Impulsul punctului material $\vec{p} = m\vec{v}$, este o măsură a mișcării mecanice pe care el o posedă (de aici provine și denumirea de cantitate de mișcare). *Teorema impulsului exprimă o lege de conservare a mișcării materiei.*

Verificarea experimentală a legii impulsului se reduce în fond la verificarea legii fundamentale a dinamicii.

5.2. TEOREMA IMPULSULUI ȘI LEGEA CONSERVĂRII IMPULSULUI PENTRU UN SISTEM DE DOUĂ PARTICULE

Fie un sistem format din două particule m_1, m_2 care interacționează între ele. Conform principiului acțiunii și reacțiunii forța $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ exercitată asupra particulei m_1 de către particula m_2 este egală în modul și de sens opus cu forța $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ exercitată asupra particulei m_2 de către particula m_1, adică

$$\vec{\mathcal{F}}_{12} = -\vec{\mathcal{F}}_{21} \text{ sau } \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21} = 0. \tag{5.2}$$

Cele două forțe acționează de-a lungul dreptei care unește cele două particule (fig. 5.1) și *rezultanta lor este nulă.*

În afară de aceste forțe de interacțiune care constituie forțe interne pentru sistemul nostru, fiecare particulă interacționează în general cu mediul exterior, ceea ce se traduce prin forțele externe: $\vec{F}_1$ asupra particulei m_1, $\vec{F}_2$ asupra particulei m_2 (fig. 5.1). Am notat forțele interne cu $\vec{\mathcal{F}}$ rond.

Să scriem legea impulsului pentru fiecare particulă. Dacă forțele *nu* sînt constante, atunci pentru un interval Δt oarecare trebuie considerate forțele medii pe acel interval, de aceea mai jos toate forțele sînt constante sau medii pe intervalul Δt:

$$(\vec{F}_1 + \vec{\mathcal{F}}_{12})\Delta t = \Delta(m_1\vec{v}_1);\ (\vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{21})\Delta t = \Delta(m_2\vec{v}_2). \tag{5.3}$$

Adunînd membru cu membru cele două ecuații, găsim:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{\mathcal{F}}_{12} + \vec{\mathcal{F}}_{21})\Delta t = \Delta(m_1\vec{v}_1) + \Delta(m_2\vec{v}_2) = \Delta(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) \tag{5.4}$$

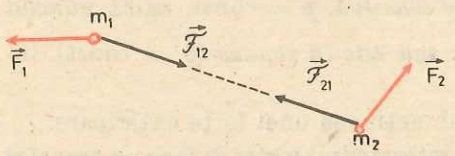


Fig. 5.1. Sistem de două particule care interacționează între ele și cu mediul exterior.

Dar, conform lui (5.2), rezultanta forțelor interne este nulă. Suma vectorială a forțelor externe dă *rezultanta forțelor externe:*

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \tag{5.5}$$

Pe de altă parte, impulsul total al sistemului este su
surilor particulelor componente:

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Ținînd seama de aceasta, ecuația (5.4) devine:

$$\vec{F}_m\,\Delta t = \Delta\vec{P}.$$

Impulsul forțelor externe asupra sistemului este e
sului total al sistemului.

Ecuația (5.7) se poate transcrie sub forma cunoscu

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t},\ \left(\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\right)$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forțelor externe și $\vec{P}$ impulsul

Forțele interne ale sistemului nu contribuie la v
al sistemului, adică *nu pot schimba impulsul total al si*
fiind nulă). (Ele pot însă redistribui impulsul între pa
ciocniri.)

Dacă rezultanta forțelor externe este permanent zer
izolat, adică nu interacționează cu mediul exterior, in
(rămîne constant).

5.3. TEOREMA IMPULSULUI ȘI LEGEA CONSER
PENTRU UN SISTEM OARECARE DE

Rezultatele obținute sînt valabile pentru un sistem form
de particule. În adevăr, particulele sistemului interacționează
perechi, două cîte două egale în modul și de sensuri opuse, c
și reacțiunii. De aceea, dacă le însumăm pentru întregul siste
două și dau rezultantă nulă.

Rezultanta forțelor interne ale unui sistem de particule es

Scriind legea impulsului pentru fiecare particulă și ad
membru, așa cum am făcut pentru un sistem format din do
pulsului pentru un sistem oarecare:

$$\vec{F}_m\Delta t = \Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1,$$

unde $\vec{F}_m$ este valoarea medie a rezultantei $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$
$+ m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \ldots + \vec{p}_n$ sau sub forma legii

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t},\ \left(\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}\right).$$

În aceste legi ale impulsului nu apar decît forțele *externe* ca
mului (cele interne dau rezultantă nulă).

Dacă sistemul este izolat sau dacă rezultanta forţelor externe este permanent nulă, impulsul total al sistemului se conservă.

Această lege este atît de generală şi de importantă încît uneori este formulată şi cunoscută sub numele de *principiul conservării impulsului* pentru sisteme izolate, alături de *principiul conservării energiei*.

Numai prin interacţiune cu mediul exterior se transmite mişcare şi se schimbă impulsul total al sistemului.

Deşi forţele interne nu pot schimba impulsul *total* al sistemului, ele schimbă în general impulsurile *părţilor componente* ale sistemului, adică *redistribuie* impulsul în interiorul sistemului, tocmai ca urmare a interacţiunii dintre *părţile* sistemului.

5.4. CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM DE DOUĂ PARTICULE

Vom introduce acum noţiunea de *centru de masă* (CM) al unui sistem — un punct asociat sistemului care caracterizează oarecum „global" distribuţia de masă a sistemului şi se bucură de proprietăţi remarcabile.

Pentru două particule de aceeaşi masă $m_1 = m_2$, centrul lor de masă se află la mijlocul distanţei dintre ele, pe dreapta care uneşte cele două particule. Dacă particulele au mase diferite, centrul lor de masă se va găsi tot pe dreapta care le uneşte, dar mai aproape de particula de masă mai mare şi anume, distanţele CM pînă la cele două particule sînt în raport invers cu masele lor (fig. 5.2):

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} \text{ sau } m_1 d_1 = m_2 d_2, \text{ de unde } d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d, \text{ unde } d = d_1 + d_2. \quad (5.10)$$

Să găsim vectorul de poziţie $\vec{r}_{CM}$ al centrului de masă. Observăm că $\vec{r}_{CM}$ se compune din $\vec{r}_1$ plus vectorul $\vec{d}_1$ dus din m_1 spre CM. Dar $d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$ (5.10), relaţie care se scrie şi vectorial: $\vec{d}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.

Rezultă atunci: $\vec{r}_{CM} = \vec{r}_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

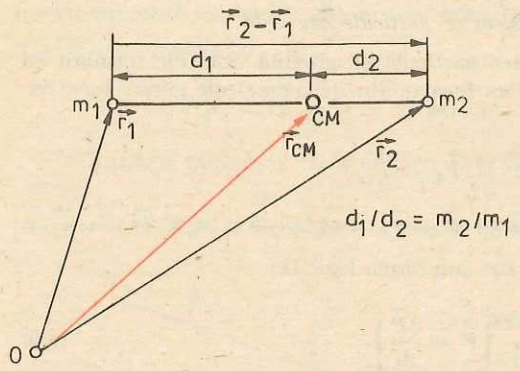


Fig. 5.2. Centrul de masă (CM) al unui sistem de două particule.

sau

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.11)$$

Relaţia vectorială (5.11) scrisă pe componente, de exemplu în cazul plan, ne dă coordonatele centrului de masă:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \qquad y_{CM} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}. \quad (5.12)$$

De exemplu, alegînd axa Ox pe direcţia celor do
cu originea în m_1 şi sensul spre m_2, avem:

$$x_1 = 0,\ x_2 = d \text{ şi } x_{CM} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2}{m_1 + m_2}$$

Vom demonstra două proprietăţi remarcabile ale

a) Să calculăm viteza centrului de masă. Pentru do
t, t' avem (notăm $m = m_1 + m_2$ — masa sistemului):

$$m\vec{r}_{CM} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2;\ m\vec{r}'_{CM} = m_1\vec{r}'_1 +$$

De unde prin scădere membru cu membru:

$$m(\vec{r}'_{CM} - \vec{r}_{CM}) = m_1(\vec{r}'_1 - \vec{r}_1) + m_2(\vec{r}'_2 - \vec{r}_2) \text{ sau } m\Delta\vec{r}$$

şi împărţind la intervalul de timp $\Delta t = t' - t$:

$$m\frac{\Delta\vec{r}_{CM}}{\Delta t} = m_1\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t}$$

sau

$$m\vec{v}_{CM} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 =$$

Impulsul total al sistemului este egal cu masa si viteza centrului de masă.

Observaţie. Centrul de masă se poate defini plecînd sului total al sistemului. În adevăr, scriind impulsul tot

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t} + m_2\frac{\Delta\vec{r}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)}{\Delta t} = m\frac{\Delta\left(\frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m}\right)}{\Delta t},\ (m =$$

se vede că punctul definit prin vectorul de poziţie:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)$$

are proprietatea remarcabilă că viteza sa înmulţită c
dă impulsul total, *ca şi cum* toată masa sistemului ar fi
de masă şi s-ar mişca cu viteza acestuia.

b) Să calculăm acceleraţia centrului de masă:

$$m\vec{v}_{CM} = \vec{P},\ m\vec{v}'_{CM} = \vec{P}',\ m(\vec{v}'_{CM} - \vec{v}_{CM}) =$$

$$m\Delta\vec{v}_{CM} = \Delta\vec{P},\ m\frac{\Delta\vec{v}_{CM}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$$

şi ţinînd seama de (5.8):

$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}.$$

Rezultanta forţelor externe este egală cu masa sistemului înmulţită cu acceleraţia centrului de masă.

Prin urmare, centrul de masă se comportă *ca* un punct material avînd masa egală cu masa sistemului şi supus forţelor externe, *ca şi cum* întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM şi forţele externe ar acţiona în CM.

Dacă sistemul este *izolat* (sau rezultanta forţelor *externe* este nulă), centrul de masă va fi în repaus sau în mişcare rectilinie uniformă.

5.5. CENTRUL DE MASĂ AL UNUI SISTEM OARECARE DE PARTICULE

Formula (5.11) se generalizează uşor pentru un sistem format dintr-un număr oarecare de particule.

Fie 3 particule. Calculăm întîi centrul de masă a două particule, de exemplu $\vec{r}_{12} = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ şi, înlocuindu-le cu o singură particulă de masă $(m_1 + m_2)$ situată în $\vec{r}_{12}$, calculăm centrul de masă dintre aceasta şi particula m_3:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{(m_1 + m_2)\vec{r}_{12} + m_3\vec{r}_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Procedînd astfel din aproape în aproape obţinem în general:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k. \qquad (5.15)$$

Dacă un corp *omogen* posedă un plan de simetrie, atunci grupînd ca mai sus două cîte două particulele identice simetrice (situate de o parte şi de alta a planului de simetrie), găsim că CM se află în planul de simetrie. La fel se întîmplă în cazul unei axe de simetrie sau în cel al centrului de simetrie.

Dacă un corp omogen posedă un plan de simetrie, o axă de simetrie sau un centru de simetrie, centrul său de masă se va găsi în planul de simetrie, pe axa de simetrie sau în centrul de simetrie.

De exemplu, CM al unui cilindru omogen se află pe axa sa; CM al unei sfere omogene se află în centrul sferei; CM al unui paralelipiped dreptunghic se află în centrul paralelipipedului; CM al unui disc omogen subţire se află în centrul discului; CM al unei plăci omogene dreptunghiulare este în centrul ei.

Subliniem că CM este un punct geometric asociat sistemului, a cărui poziţie este determinată de *distribuţia* masei. În CM poate să nu fie deloc masă, ca în cazul unui inel omogen.

În formula (5.15) putem grupa termenii sumei corespunzători unui subsistem şi înlocui cu masa subsistemului (M) înmulţită cu vectorul de poziţie al CM corespunzător al subsistemului $(\vec{R})$:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_j M_j\vec{R}_j, \qquad (5.16)$$

unde M_j sînt masele subsistemelor şi $\vec{R}_j$ vectorii de poziţie ai centrelor lor de masă.

Formula (5.16) se scrie pe componente într-un sistem de coordonate convenabil.

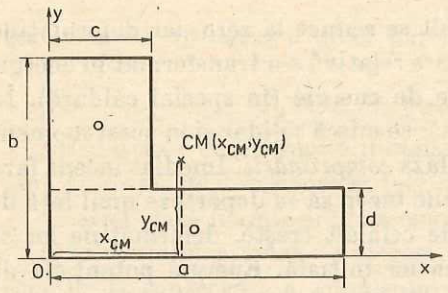


Fig. 5.3. Calculul poziţiei centrului de masă (CM) al unei plăci omogene.

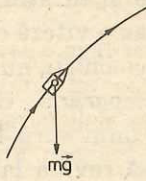


Fig. 5.4. Cen
continuă să
centru de ma
p

E X E M P L U

Să se calculeze CM al plăcii omogene din figura 5.3.

Rezolvare. Placa fiind *omogenă*, masele sînt proporţional
folosi ariile respective. Alegînd axele ca în figură, avem

$$x_{CM} = \frac{ad \cdot \dfrac{a}{2} + (b - d)c \cdot \dfrac{c}{2}}{ad + (b - d)c}, \qquad y_{CM} = \frac{ad \cdot \dfrac{d}{2} + (b}{ad}$$

Cele două teoreme privind CM, de la § 5.3, rămîn val
oarecare. Astfel, de exemplu, *dacă rezultanta forţelor externe*
este izolat), centrul său de masă va fi în repaus sau în mişcare
ţile sistemului se pot mişca accelerat.

Mişcarea centrului de masă este dictată de forţele *exter*
ţează mişcarea centrului de masă. De exemplu, dacă un obu
(sub acţiunea greutăţii) explodează la un moment dat, ce
să se mişte, ca centru de masă al schijelor, neperturbat pe par
întîmplat, pînă cînd măcar una din schije atinge pămîntul
va devia CM de pe parabolă (fig. 5.4).

Într-un cîmp gravitaţional *omogen* centrul de masă coi
(punctul de aplicaţie al rezultantei forţelor de greutate).

5.6. CIOCNIRI

Prin *ciocnirea* a două sau mai multe corpuri se în
acţiune care durează un timp finit, astfel încît atît î
nire corpurile nu interacţionează. La ciocnirea corpu
acţiunea durează atît timp cît corpurile sînt în contac
este foarte scurt faţă de duratele obişnuite (timpul d
milisecundelor).

La ciocnirea a două corpuri (macroscopice) pu
sau etape. Imediat ce corpurile vin în contact încep
bruscă, şi deformarea lor. Energia cinetică de mişc
faţă de celălalt se transformă, prin lucrul mecanic al
nire, în energie potenţială de deformare a corpuri

viteza relativă a unui corp față de celălalt se reduce la zero, iar deformațiile lor sînt maxime. Energia cinetică de mișcare relativă s-a transformat în energie potențială de deformare și în alte forme de energie (în special căldură). În acest moment corpurile au o viteză comună, se mișcă solidar și în acest moment se termină prima fază a ciocnirii, numită faza *comprimării*. Imediat începe faza a doua a ciocnirii: faza *separării*. Corpurile încep să se depărteze unul față de altul, viteza relativă a unui corp față de celălalt crește, deformațiile lor se reduc, corpurile caută să revină la forma lor inițială. Energia potențială de deformare se transformă parțial în energie cinetică de mișcare relativă a corpurilor. În momentul cînd se separă complet, se termină faza decomprimării sau separării.

La ciocnirea unor corpuri elastice (bile de oțel, bile de fildeș), deformațiile dispar după ciocnire, corpurile își recapătă forma lor inițială, energia cinetică „relativă" se restituie aproape integral și ciocnirea se cheamă *elastică*. Dar, în general, după ciocnire rămîn deformații *remanente*, de exemplu la bilele de plumb sau de plastilină.

În timpul ciocnirii apar forțe de interacțiune mari între corpurile care se ciocnesc, dar aceste forțe durează foarte puțin, atîta timp cît durează ciocnirea (contactul dintre corpuri). Conform principiului acțiunii și reacțiunii, forțele cu care acționează cele două corpuri, unul asupra celuilalt, sînt egale în modul și de sensuri opuse (fig. 5.5). Forțele normale se datoresc deformării elastice reciproce a celor două corpuri, iar forțele tangențiale se datoresc frecării dintre corpuri în planul de contact (întrepătrunderii asperităților sau rugozităților suprafețelor în contact).

Pentru sistemul format din cele două corpuri forțele care apar în procesul ciocnirii sînt forțe *interne* și dau rezultantă *nulă*. Prin urmare aceste forțe *nu* pot schimba impulsul *total* al celor două corpuri, dar îl *redistribuie* între cele două corpuri. De exemplu, dacă un vagonet lovește un altul aflat în repaus, acesta din urmă va căpăta un impuls pe seama impulsului primului corp: *avem un transfer de mișcare mecanică și de impuls de la un corp la altul prin ciocnire.*

În timpul foarte scurt cît durează ciocnirea, forțele externe obișnuite (de exemplu forțele de frecare sau forțele de greutate) nu pot modifica sensibil impulsul total al sistemului. De aceea chiar dacă corpurile care se ciocnesc sînt supuse la forțe externe, putem totuși scrie conservarea impulsului total al sistemului în sensul următor:

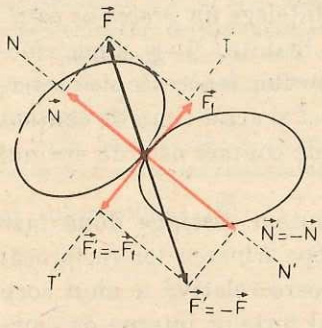


Fig. 5.5. Forțele care apar la ciocnirea a două corpuri.

Suma vectorială a impulsurilor corpurilor imediat înainte de ciocnire trebuie să fie egală cu suma vectorială a impulsurilor corpurilor imediat după ciocnire:

$$\vec{P}_{inițial} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots = \vec{P}_{final} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots \qquad (5.17)$$

De exemplu, în cazul a două particule:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2.$$

Ecuația de conservare a impulsului este o egalita
pînă la urmă pe componente într-un sistem de coor

Astfel, dacă înainte și după ciocnire particulele se
— cazul *unidimensional* — alegem această dreaptă
ecuația de conservare a impulsului devine:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2,$$

unde vitezele inițiale v_1, v_2 și cele finale v'_1, v'_2, pot fi po
cum particulele se mișcă în sensul pozitiv ales sau c

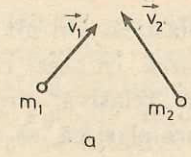
5.6.1. **Ciocnirea plastică (total neelastică).** Un caz
ciocnirilor este ciocnirea *total neelastică* sau *plastică*.
nire corpurile *se cuplează*, se lipesc și își continuă miș
eași viteză comună. Exemple: cînd aruncăm o piat
alergăm după un vagonet (tramvai, barcă) și sărim
rămîne înfipt într-o țintă sau un obiect fragil cade jo
acestor ciocniri este cazul descompunerii sau desfaceri
fragmente (de exemplu cazul exploziei unui obuz). D
și proiectăm filmul în sens invers, obținem exact ca
invers, o ciocnire plastică filmată și proiectată în sen
agregare, descompunere sau explozie. De aceea și ac
punere pot fi înglobate în categoria de ciocniri plast
din mers dintr-un vagonet (cărucior, barcă) sau aruncă
barcă diferite obiecte etc. În toate aceste cazuri se
servării impulsului.

Fie două particule cu masele m_1, m_2 și vitezele $\vec{v}_1$, $\vec{v}$

Înainte de ciocnire avem două corpuri cu impulsur
ciocnire avem un singur corp de masă $m_1 + m_2$ și vit
servării impulsului total:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}', \text{ de unde } \vec{v}' =$$

Viteza finală se poate afla și grafic. Reprezentăm la o anumită scară vitezele și impulsurile (fig. 5.6). Compunem vectorial impulsurile $m_1\vec{v}_1$ și $m_2\vec{v}_2$ (după regula paralelogramului) și rezultatul îl împărțim la masa totală $m_1 + m_2$.



a

Fig. 5.6. Ciocnirea plas

În cazul *unidimensional* formula (5.20) devine

$$v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{5.21}$$

În ciocnirea plastică o parte din energia cinetică a corpurilor se transformă în alte forme de energie (în special în căldură):

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} (m_2 + m_1) v'^2 + Q,$$
$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2. \tag{5.22}$$

Introducînd aici pe v' din (5.21), obținem:

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} m_r v_r^2, \tag{5.23}$$

unde $v_r = v_1 - v_2$ este viteza relativă (a particulei 1 față de particula 2), iar m_r se numește masa redusă a celor două particule. Prin urmare, numai energia cinetică de mișcare relativă (a unei particule față de alta) dispare prin cuplarea particulelor, transformîndu-se în alte forme de energie.

EXEMPLU

Două cărucioare de mase $m_1 = 1{,}00$ kg, $m_2 = 2{,}00$ kg se mișcă unul spre celălalt cu vitezele $v_1 = 1{,}00$ m/s, $v_2 = -2{,}00$ m/s. Prin ciocnire cărucioarele se cuplează (ciocnire plastică). Care va fi viteza lor comună după ciocnire și energia cinetică pierdută?

Rezolvare. Am ales axa Ox în sensul mișcării primului cărucior, de aceea viteza v_2 este negativă. Scriem conservarea impulsului:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v', \quad v' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v' = \frac{1{,}00 \text{ kg} \cdot 1{,}00 \text{ m/s} - 2{,}00 \text{ kg} \cdot 2{,}00 \text{ m/s}}{1{,}00 \text{ kg} + 2{,}00 \text{ kg}} = -1{,}00 \text{ m/s}.$$

Semnul minus arată că după ciocnire și cuplare cărucioarele se vor mișca în sensul negativ al axei alese Ox, adică în sensul vitezei inițiale a celui de-al doilea cărucior (care a avut un impuls inițial mai mare).
Energia cinetică pierdută ($v_r = v_1 - v_2 = 1{,}00 - (-2{,}00) = 3{,}00$ m/s):

$$Q = -\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 = 3{,}00 \text{ J}.$$

5.6.2. **Ciocnirea perfect elastică.** Un alt caz particular simplu al ciocnirilor este ciocnirea *perfect elastică*. În acest caz deformațiile corpurilor dispar după ciocnire, energia cinetică „relativă", transformată în timpul ciocnirii în energie potențială de deformare elastică, se restituie integral în energie cinetică după ciocnire.

Ciocnirea este perfect elastică dacă energia cinetică
prin ciocnire, adică energia cinetică totală a corpurilo
egală cu energia cinetică totală a corpurilor după c

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}$$

Bineînțeles, mai avem și ecuația de conservare a im

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' - m_2 \vec{v}_2'.$$

În natură nu există *riguros* ciocnire *perfect* elast
scopice, dar de multe ori corpurile elastice (de exempl
cărucioarele prevăzute cu tampoane-resorturi elastice
fică bine condiția (5.24).

De obicei cunoaștem masele și vitezele inițiale a
aflăm vitezele lor finale. Avem o ecuație de conser
(5.24) și trei ecuații algebrice (pe componente) de
(5.25), deci 4 ecuații, și $3 + 3 = 6$ necunoscute pe
zelor finale. Prin urmare, în cazul general al ciocnir
ticule, datele și ecuațiile de mai sus nu sînt suficien
plan vom avea $1 + 2 = 3$ ecuații și $2 + 2 = 4$ necu
mai cunoaștem o dată asupra ciocnirii.

În cazul *unidimensional*, cînd atît înainte, cît și
se mișcă pe *aceeași dreaptă* pe care o alegem drept axă
de conservare și două necunoscute:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}$$

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

Sistemul se rezolvă astfel. Trecem termenii care con
cei care conțin pe m_2 în dreapta:

$$m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_2 (v_2'^2 - v_2^2)$$

sau

$$m_1 (v_1 - v_1') (v_1 + v_1') = m_2 (v_2' - v_2)$$

și

$$m_1 (v_1 - v_1') = m_2 (v_2' - v_2).$$

Împărțim membru la membru cele două ecuații:

$$v_1 + v_1' = v_2' + v_2 \text{ sau } v_r' = v_1' - v_2' = -(v_1 -$$

Aici $v_1' - v_2'$ reprezintă viteza *relativă* v_r', a particulei
după ciocnire, iar $v_1 - v_2$ reprezintă viteza relativă v_r
urmare, în ciocnirea perfect elastică unidimensiona
din ele (de exemplu prima) se apropie de cealalt
relativă $v_r = v_1 - v_2$, o lovește și se întoarce înap
egală în modul dar de semn schimbat.

Ecuația (5.28) împreună cu ecuația de conservare a impulsului (5.27) ne permite să aflăm imediat vitezele finale v_1', v_2' după ciocnirea perfect elastică unidimensională a două particule:

$$v_1' = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_1, \quad v_2' = 2\frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} - v_2. \tag{5.29}$$

Discuție: a) Dacă particula *2* era în repaus înainte de ciocnire ($v_2 = 0$), obținem:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1}v_1, \quad v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1. \tag{5.30}$$

Se vede că în acest caz corpul *2* va căpăta o viteză v_2' în sensul în care este lovit (v_2' este de același semn cu v_1), în timp ce primul corp se poate întoarce înapoi dacă masa sa m_1 este mai mică decît a celui de-al doilea corp.

b) Dacă masele sînt egale, din (5.29) rezultă că $v_1' = v_2$, $v_2' = v_1$, corpurile schimbă vitezele între ele, ca și cum ar trece unul pe lîngă celălalt fără să se atingă, unul luînd locul celuilalt. În aceleași condiții (adică $m_1 = m_2$), dacă al doilea corp era în repaus ($v_2 = 0$), atunci primul corp se oprește ($v_1' = 0$), iar al doilea pornește cu viteza primului ($v_2' = v_1$). Aceste rezultate sînt frumos ilustrate de următorul experiment.

EXPERIMENT

Suspendăm două bile identice pe fire paralele egale (fig. 5.7). Dacă deviem o bilă cu un anumit unghi și îi dăm drumul să se ciocnească cu cealaltă, atunci prin ciocnire prima se va opri, iar a doua va fi deviată aproape cu același unghi ca prima. După aceasta, bila a doua se întoarce înapoi și o lovește pe prima, oprindu-se la rîndul ei, și așa mai departe pînă ce mișcarea se stinge sau se strică (bilele nu mai rămîn în același plan vertical, dacă nu sînt perfect centrate sau dacă nu sînt suspendate fiecare prin 2 fire în forma literei V).

Dacă acum bila deviată are masă mai mare decît cea aflată în repaus, atunci după ciocnire ea va devia în continuare; dacă are masă mai mică, ea va fi deviată înapoi.

Observăm că în orice fel de ciocnire impulsul total al sistemului (izolat) se conservă, fiindcă rezultanta forțelor interne de ciocnire este totdeauna zero (principiul III), în timp ce energia cinetică totală în general nu se conservă, fiindcă lucrul mecanic al forțelor interne nu este în general zero și

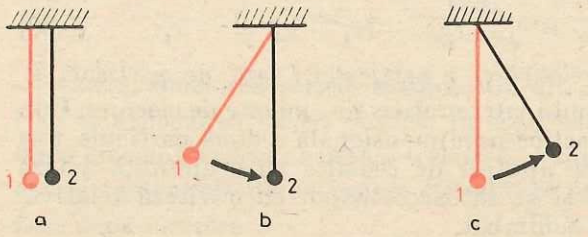


Fig. 5.7. Ciocnirea a două bile identice, dintre care una este în repaus

atunci o parte din energia cinetică se transformă în *alte* dură sau alte forme disipate în mediu). În cazul explozi se creează energie cinetică pe seama altor forme ale en etc.). Bineînțeles, energia *totală* a sistemului izolat s conservării energiei).

5.6.3. **Ciocnirea cu un perete.** În copilărie ne-am j cînd-o pe podea sau pe perete și apoi prinzînd-o. Obse că dacă aruncăm mingea perpendicular pe perete (sau pe înapoi tot perpendicular pe perete cu o viteză egală în schimbat, față de viteza inițială.

În teoria ciocnirilor se înțelege prin *ciocnirea cu un un corp de masă foarte mare, astfel încît viteza acestuia nu nire.*

Acesta este cazul ciocnirii unei mingi cu podeaua sau al mobil) sau cazul ciocnirii unei molecule de gaz cu per găsește gazul sau cu pistonul (mobil) dacă gazul se afl piston.

Să considerăm ciocnirea perfect elastică (unidimens masă m_2 foarte mare (față de m_1). Să transcriem atunci următoarea formă:

$$v_1' = 2\frac{\frac{m_1}{m_2}v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} - v_1; \quad v_2' = 2\frac{\frac{m_1}{m_2}v_1 + v}{\frac{m_1}{m_2} + 1}$$

Dacă masa m_2 este foarte mare, atunci fracția $\frac{m_1}{m_2}$ va fi tru m_2 extrem de mare, fracția m_1/m_2 se va micșora formulele de mai sus devin (punînd $m_1/m_2 = 0$):

$$v_1' = 2v_2 - v_1, \qquad v_2' = v_2,$$

adică în adevăr viteza peretelui (de masă m_2) nu se s ($v_2' = v_2$). Prima formulă se obține și direct din condiția relativă în ciocnirea perfect elastică unidimensională, c

În cazul cînd peretele este în repaus ($v_2 = 0 = v_2'$) așteptat: $v_1' = -v_1$, adică particula se întoarce înapoi (viteză în modul (fig. 5.8, *a*).

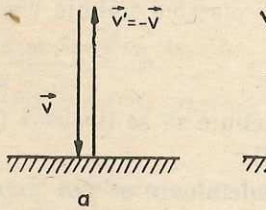


Fig. 5.8. Ciocnirea perfect elastică cu un perete în repaus: *a)* frontală, *b)* oblică.

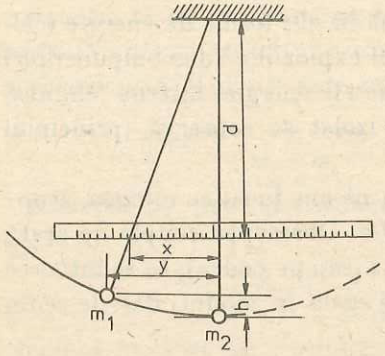


Fig. 5.9. Dispozitiv pentru verificarea legilor de conservare la ciocniri.

În sfîrșit, dacă particula lovește oblic și perfect elastic un perete aflat în repaus, ea ricoșează sub un unghi de „reflexie" α', egal cu unghiul de „incidență" (de cădere) α și cu viteza $\vec{v}'$ este egală în modul cu viteza $\vec{v}$ (fig. 5.8, *b*):

$$|\vec{v}'| = |\vec{v}|, \quad \alpha' = \alpha. \tag{5.33}$$

Verificarea experimentală a legilor de conservare la ciocniri se poate face de exemplu cu dispozitivul simplu din figura 5.9.

Două bile de mase m_1, m_2 cunoscute sînt suspendate pe fire paralele apropiate, de lungime l(~50 cm). Bila m_1 este deviată, astfel încît firul său de suspensie să se deplaseze cu o distanță x(~5 cm), măsurată pe o riglă gradată; bila m_2 rămîne în repaus. După ciocnire notăm iarăși distanțele x_1', x_2' cu care deviază firele de suspensie ale bilelor.

Viteza imediat înainte sau imediat după ciocnire se exprimă prin înălțimea respectivă h : $v = \sqrt{2gh}$ (fig. 5.9). Conform figurii 5.9, din asemănarea triunghiurilor dreptunghice rezultă:

$$\frac{y}{x} = \frac{l-h}{d}, \text{ dar } y = \sqrt{l^2-(l-h)^2} = \sqrt{h(2l-h)}.$$

Considerînd devieri cu unghiuri mici, deci $h \ll l$, putem scrie aproximativ (neglijînd pe h față de l și $2l$):

$$\frac{y}{x} \cong \frac{l}{d}, \quad y \cong \sqrt{2hl}, \text{ de unde } \sqrt{2h} \cong \frac{x}{d}\sqrt{l}$$

și deci viteza

$$v = \sqrt{2gh} \cong x\frac{\sqrt{gl}}{d} = Cx,$$

unde (5.34)

$$C = \frac{\sqrt{gl}}{d},$$

este constanta aparatului pe care o calculăm de la bun început.

Alegînd o deviație x_1 și măsurînd deviațiile x_1' și x_2', calculăm vitezele v_1' și v_2' cu (5.34) și le comparăm cu vitezele teoretice calculate cu (5.30) în cazul ciocnirii perfect elastice.

În cazul ciocnirii plastice trebuie verificată relația ($v_2 = 0$):

$$v' = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1. \tag{5.35}$$

În acest caz, bilele trebuie să se lipească (cupleze) (bile din plastilină sau alt material convenabil).

Cu o anumită îndemînare se pot măsura direct înălțimile h cu ajutorul unei rigle așezate vertical pe masă în dreptul bilei respective.

1. Un corp de masă $m = 10{,}0$ kg, avînd viteza inițială $v_0 =$ forță constantă $F = 50$ N (pe aceeași direcție cu viteza). Să se rea corpului.

Rezolvare. Scriem legea impulsului: $\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} = m\vec{v} - m$ pînă la oprire, atunci viteza finală $v = 0$ (condiția de oprire axa mișcării:

$$F\Delta t = 0 - mv_0, \quad \Delta t = \frac{mv_0}{F} = \frac{10{,}0 \text{ kg} \cdot 10{,}0 \text{ m}}{50 \text{ N}}$$

Analog, dacă un corp este aruncat vertical în sus cu viteza de greutate îl frînează și timpul de urcare va fi: $t_u = mv_0/mg =$

2. O minge cu masa $m = 0{,}100$ kg lovește frontal un perete cu timpul de contact cu peretele este $\Delta t = 1{,}0$ ms, să se apare la contactul dintre minge și perete.

Rezolvare. Să scriem legea impulsului pentru minge (fig. 5.8, *a*): $\vec{F}_m\Delta t = m\vec{v}' - m\vec{v}$. Dar $\vec{v}' = -\vec{v}$ din condiția de ciocnire perfect elastică, atunci $\vec{F}_m\Delta t =$ $-2m\vec{v}$, $\vec{F}_m = -\frac{2m\vec{v}}{\Delta t}$. Prin urmare, forța exercitată asupra mingii din partea peretelui este perpendiculară pe perete și de sens opus vitezei inițiale și are valoarea:

$$F_m = \frac{2mv}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 0{,}100 \text{ kg} \cdot 5{,}0 \text{ m/s}}{1{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 1{,}0 \cdot 10^3 \text{ N}.$$

Fig
lui
elas
pau

Dacă mingea lovește oblic peretele (fig. 5.10), atunci varia prin scăderea *vectorială*: $\Delta\vec{p} = m\vec{v}' - m\vec{v}$ (fig. 5.10). În valoarea absolută

$$|\Delta\vec{p}| = 2mv\cos\alpha, \quad F_m = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}$$

și forța este de asemenea perpendiculară pe perete.

3*. Un elev stă pe un cărucior aflat în repaus și ține în mîini $m = 2{,}00$ kg. Masa elevului și a căruciorului este $M = 60{,}0$ k o viteză $u = 3{,}1$ m/s relativă la el *înainte* de aruncare (ceea bilelor același impuls $F\Delta t = m\,v_{final} - m\,v_{inițial} = m\,u$). Ca căruciorului, dacă elevul aruncă bilele în același sens: *a)* si energie cinetică creează elevul?

Rezolvare. a) La aruncarea simultană:

$$0 = Mv' + 2mu, \quad v' = -\frac{2m}{M}u = -\frac{0{,}62}{3} = -$$

$$\Delta E_c = \frac{m}{M}(M+2m)u^2 = 20{,}5 \text{ J}.$$

Viteza imprimată căruciorului este opusă vitezei de aruncare

b) La prima aruncare:

$$0 = (M+m)v_1 + mu, \; v_1 = -\frac{m}{M+m}u; \; \Delta E_{c1} = \frac{1}{2}mu^2$$

La a doua aruncare: $(M + m)v_1 = Mv_2 + m(v_1 + u)$,

$$v_2 = v_1 - u\frac{m}{M} = -\frac{m(2M+m)}{M(M+m)}u = -\frac{0{,}61}{3} = -0{,}20 \text{ m/s}, \quad |v'| > |v_2|;$$

$$\Delta E_{c2} = \frac{1}{2}mu^2\frac{M+m}{M} = 9{,}93 \text{ J}.$$

În toate ecuațiile de conservare a impulsului vitezele corpurilor trebuie luate față de *același* sistem de referință (Pămîntul), de aceea în ultima ecuație apare viteza bilei $v_1 + u$ față de Pămînt, fiindcă bila are deja viteza căruciorului v_1 la care se adaugă viteza u imprimată față de cărucior. Se poate scrie ecuația a doua și față de sistemul de referință care se mișcă cu viteza v_1 a căruciorului: $0 = Mv_2' + mu$, unde v_2' este a doua viteză a căruciorului față de prima viteză v_1. Atunci față de Pămînt: $v_2 = v_1 + v_2'$ și regăsim rezultatul de mai sus.

Să reluăm problema, dar considerînd că elevul aruncă bilele în sensuri opuse: *a)* simultan, *b)* succesiv.

a) La aruncarea simultană: $0 = Mv' + mu - mu$, $v' = 0$, ceea ce era de așteptat; cele două impulsuri imprimate se compensează fiind egale în modul și de sensuri opuse:

$$\Delta E_c = mu^2 = 19{,}22 \text{ J}.$$

b) La prima aruncare: $0 = (M + m)v_1 + mu$, $v_1 = -\frac{m}{m+M}u$ și la a doua aruncare:

$$(M + m)v_1 = Mv_2 + m(v_1 - u), \quad v_2 = v_1 + \frac{m}{M}u = \frac{m^2u}{M(M+m)} = \frac{1}{300}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}0033 \text{ m/s},$$

deci căruciorul va căpăta pînă la urmă o viteză în sensul primei aruncări, ceea ce era de așteptat deoarece a doua aruncare are efect mai puternic asupra căruciorului, acesta avînd acum o masă mai mică. Energiile cinetice create sînt aceleași ca la aruncarea succesivă în același sens.

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un meteorit arde în atmosferă, fără a ajunge la suprafața Pămîntului. Unde dispare impulsul său?

R: parțial în particulele de ardere, parțial în moleculele de aer lovite.

2. Un disc omogen se rotește în jurul axei sale fixe. Care este impulsul său total?

R: zero.

3. Cum s-ar putea întoarce un cosmonaut, ieșit în spațiul cosmic, înapoi la nava cosmică, dacă cablul care-l leagă de navă se rupe, știind că cosmonautul are cu el o trusă de instrumente?

R: aruncă instrumentele în sensul opus.

4. Pe o scîndură stă un om. Cum se va încovoia scîndura în primul moment cînd omul brusc se ghemuiește? Dar dacă, odată ghemuit, se ridică brusc?

R: se ridică; coboară.

5. Întîmplarea povestită de Münchhausen că ar fi ieșit dintr-o mlaștină (cu cal cu tot) trăgîndu-se cu putere de păr în sus poate fi adevărată?

R: nu.

6. Poate un om să se ridice pe el însuși, trăgînd de un capă
cută peste un scripete (cu axă orizontală fixă) și legată c
Cu ce forță trebuie să tragă de sfoară?

7. S-ar putea propulsa o barcă cu pînze, suflînd aer spre
tilator instalat în barcă? Dar dacă suflăm alături de pî
pînze)?

8*. Deși forțele interne ale unui sistem nu pot modifica în
temului, ele pot crea sau anihila două impulsuri egale
purtate de două părți componente ale sistemului (de exe
al ciocnirilor plastice). Cum ați putea explica înaintar
cu elice?

R: impulsul navei este opus i

9. Caracatițele se pot deplasa cu o viteză pînă la 60 m
care o absorb. Pe ce principii se bazează deplasarea lor?

10. Dacă umflăm un balon de cauciuc cu aer și fără a-l leg
orificiul în jos, ce se va întîmpla?

11. Ce se întîmplă cu o barcă ușoară cînd ne deplasăm pe
R

12. Dacă pe un cărucior este suspendat un pendul și îi dă
va întîmpla cu căruciorul?

13. *a)* De ce cînd atingem Pămîntul după o săritură trebuie
puțin picioarele)? Dar dacă am sta țeapăn?
b) De ce putem sări fără pericol de la etajul doi sau t
deasupra solului?
c) Cînd un fotbalist prinde mingea, el relaxează puțin
puțin înapoi împreună cu mingea. De ce? Dacă ar sta ț
ce s-ar întîmpla?

R: forța medie de impact (ciocnire) este invers pro
(v. relația 5.36).

14. Pe o masă de biliard stau două bile de diametre egale
rite. Cum putem determina fără cîntar sau alte aparat
sau care anume are masă mai mare?

R:

15. Impulsul unui corp este $p = 4{,}0$ N · s, iar energia cine
masa și viteza corpului.

R: $m = \frac{p^2}{2E}$

16. Ecuația de mișcare a unui punct material de masă m =
Să se scrie expresia impulsului în funcție de timp.

17. Un punct material cu masa $m = 1{,}0$ kg se mișcă circular
Să se calculeze variația de impuls în timpul: *a)* unei p
perioadă, *c)* unui sfert de perioadă.

R: $|\Delta\vec{p}| = 0$; $2mv = 20$

18. O bilă cu masa $m = 100$ g a căzut liber pe un plan orizontal avînd în momentul lovirii o viteză $v = 10$ m/s. Să se afle variația impulsului prin lovire, considerînd ciocnirea: *a)* perfect elastică, *b)* absolut inelastică (plastică). Dacă durata ciocnirii a fost $\Delta t = 20$ ms, care a fost forța medie de lovire?

R: *a)* $\Delta p = 2mv = 2{,}0$ N · s; $F_m = \dfrac{\Delta p}{\Delta t} = 100$ N.

b) $\Delta p = mv = 1{,}0$ N · s; $F_m = 50$ N.

19. Un corp lovește frontal un perete. În ce raport este forța medie de contact, în cazul ciocnirii elastice, față de forța din cazul ciocnirii plastice, dacă timpul de ciocnire este același?

R: 2.

20. Ce forță constantă de frînare trebuie aplicată unui tren de masă $m = 600$ t, care se mișcă cu viteza $v_0 = 72$ km/h, pentru a-l opri în $\Delta t = 10$ s?

R: $F = mv_0/\Delta t = 1{,}2$ MN.

21. Un corp cu masa $m_1 = 0{,}40$ kg și viteza $v_1 = 5{,}0$ m/s lovește un alt corp care se mișcă spre el pe aceeași direcție. După ciocnire corpurile se opresc. Care a fost impulsul celui de-al doilea corp?

R: $p_2 = -m_1v_1 = -2{,}0$ N · s.

22. Un vagonet de masă $M = 20$ kg se mișcă cu viteza $v = 3{,}0$ m/s. Ce viteză va căpăta vagonetul dacă în el cade vertical un sac cu masa $m = 10$ kg?

R: $v' = v\dfrac{M}{M + m} = 2{,}0$ m/s.

23. Două bile de mase $m_1 = 1{,}0$ kg și $m_2 = 2{,}0$ kg se mișcă una spre cealaltă cu vitezele $v_1 = 1{,}0$ m/s și $v_2 = -2{,}0$ m/s. Să se afle pierderea de energie cinetică (căldura) prin ciocnirea lor plastică.

R: $Q = -\Delta E_c = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(v_1 - v_2)^2 = 3{,}0$ J.

24. O bilă de lemn cu masa $M = 1{,}00$ kg stă pe un suport inelar. Un glonț de masă $m = 10{,}0$ g vine de jos în sus, lovește cu viteza $v_0 = 300$ m/s bila și rămîne înfipt în ea. Care va fi timpul de urcare al bilei pînă la înălțimea maximă? Cîtă căldură se degajă?

R: $t_u = \dfrac{m}{m + M}\dfrac{v_0}{g} = 0{,}30$ s; $Q = \dfrac{1}{2}\dfrac{mM}{m + M}v_0^2 = 446$ J.

25. Un om aflat într-o barcă trage cu ajutorul unei sfori o a doua barcă cu o forță constantă $F = 100$ N. Masa primei bărci împreună cu omul este $m_1 = 100$ kg masa celei de-a doua bărci este $m_2 = 50$ kg. Neglijînd rezistența apei, să se afle vitezele bărcilor după $\Delta t = 2{,}0$ s.

R: $v = F\,\Delta t/m_1 = 2{,}0$ m/s; $v_2 = F\,\Delta t/m_2 = 4{,}0$ m/s.

26. Un om de masă $m = 70$ kg parcurge lungimea unei bărci (de la proră la pupă) $l = 4{,}0$ m. Cu cît se deplasează barca față de apă în acest timp, dacă masa ei este $M = 30{,}0$ kg?

R: $s = \dfrac{m}{m + M}l = 2{,}8$ m.

27. Un vagon cu masa $m_1 = 10{,}0$ t se deplasează pe o cale ferată orizontală cu viteza inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s. După un timp $\Delta t = 10{,}0$ s el se ciocnește și se cuplează cu un al doilea vagon de masă $m_2 = 20{,}0$ t aflat în repaus. În timpul mișcării, atît înainte cît și după ciocnire, asupra fiecărui vagon acționează o forță de frecare egală cu $n =$ = 98-a parte din greutatea respectivului vagon. Să se afle viteza primului vagon

înainte de ciocnire, viteza vagoanelor cuplate imediat du
prin ciocnire, timpul și distanța pînă la oprirea vagoan

R: $v = v_0 - \dfrac{g}{n}\Delta t = 9{,}0$ m/

$Q = \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1m_2v^2}{m_1 + m_2} = 270$ kJ; $\Delta t' = \dfrac{v'}{g/n}$

28. Un obuz de masă $M = 70$ kg zboară cu viteza $v = 3$
el explodează în două fragmente. Unul dintre ele de ma
se mișt înainte cu viteza $v_1 = 500$ m/s. Care este viteza
Cîtă energie cinetică se creează?

R: $v_2 = \dfrac{Mv - m_1v_1}{M - m_1} = 150$ m/s; $E_c = \dfrac{1}{2}$

29. O moleculă de masă $m = 5{,}0 \cdot 10^{-26}$ kg, aflată într-un
cu viteza $v_1 = 500$ m/s și ajunge din urmă pistonul c
$= 1{,}0$ m/s și de care se ciocnește frontal perfect elastic
cinetice și a impulsului moleculei în urma ciocnirii.

R: $\Delta E_c = -2mv_2(v_1 - v_2) = -5{,}0 \cdot 10^{-2}$

30. Două bile de mase m_1 m_2 sînt suspendate pe fire paralel
Prima bilă este deviată pînă la o înălțime h_1 și lăsată li
bilele dacă ciocnirea este: *a)* elastică; *b)* plastică.
în ultimul caz?

R: *a)* $h_1' = h_1\left(\dfrac{m_1 - m}{m_1 + m}\right.$

b) $h' = h_1\left(\dfrac{m_1}{m_1 + m}\right.$

31. O particulă de masă m_1 lovește o altă particulă de mas
afle ce fracțiune din energia cinetică inițială a particul
lei 2, dacă ciocnirea este unidimensională: *a)* perfect ela
țiune se transformă în căldură în ultimul caz?

R: *a)* $\dfrac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$; *b)*

6

MOMENTUL CINETIC

Alături de mărimile fizice impuls și energie cinetică, momentul cinetic joacă un rol important în fizică, în special în caracterizarea mișcării de *rotație.*

6.1. MOMENTUL FORȚEI. MOMENTUL CINETIC AL PUNCTULUI MATERIAL

6.1.1. **Momentul forței în raport cu un punct.** Dacă un corp are o articulație fixă în jurul căreia se poate roti liber, atunci aplicînd o forță corpului, el se va roti în jurul unei axe trecînd prin articulație. Axa de rotație va fi perpendiculară pe planul definit de articulație și forță (fig. 6.1).

Efectul de rotație este același, oriunde am aplica forța pe dreapta sa suport, de exemplu prin intermediul unui fir mai lung sau mai scurt. Dacă suportul forței trece prin articulație, forța nu poate produce rotație, ci doar trage de articulație.

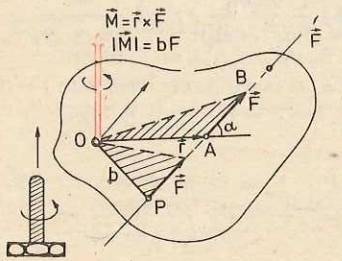


Fig. 6.1. O forță aplicată unui corp, avînd o articulație, îl rotește în jurul unei axe trecînd prin articulație, perpendiculară pe planul definit de forță și articulație. Efectul de rotație este dat de momentul forței în raport cu articulația.

Efectul de rotație este determinat atît de mărimea forței, cît și de distanța dreptei-suport a forței pînă la articulație.

Se numește brațul forței față de un punct distanța de la acel punct pînă la dreapta suport a forței, adică lungimea perpendicularei coborîte din acel punct pe dreapta suport a forței.

De exemplu, dacă înșurubăm o piuliță cu o cheie, efectul depinde atît de mărimea forței aplicate, cît și de brațul forței, adică de lungimea cheii, dacă aplicăm forța la capătul cheii, perpendicular pe cheie.

Prin urmare, efectul de rotație se poate măsura prin p
și brațul ei: $F \cdot b$. Mai mult, ținînd seama de direcția axei d
rotației produse, putem introduce un *vector* avînd modul
de axa de rotație și sensul pe această axă dat de sensul
șurub (drept) rotit de forța aplicată (ca și cum corpul
cu forța $\vec{F}$). Acesta este *vectorul moment al forței* în raport

Poziția forței pe dreapta suport este dată de vectorul
care formează unghiul α cu vectorul forță $\vec{F}$, atunci bra
$= r \sin \alpha$ și modulul momentului:

$$M = bF = rF \sin (\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha.$$

Prin urmare, din doi vectori $\vec{r}$ și $\vec{F}$ se obține un al treilea v
$|\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin (\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha$, cu direcția perpend
vectori deci pe planul lor $[\vec{r}, \vec{F}]$ și cu sensul pe această d
de înaintare al unui șurub sau burghiu așezat pe această
la $\vec{r}$ la $\vec{F}$. Se introduce astfel o nouă operație între vector

Se numește produs vectorial a doi vectori $\vec{a}$, $\vec{b}$, notat
vector $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, avînd modulul $|\vec{c}| = c = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot$
direcția perpendiculară pe planul vectorilor $(\vec{a}, \vec{b})$ deci p
sensul dat de regula burghiului.

Regula burghiului: se așază burghiul pe direcția resp
astfel încît primul vector $\vec{a}$ să se suprapună peste cel d
sensul de înaintare al burghiului va fi sensul produsului v

Din figura 6.2 se vede că *modulul* produsului vecto
este egal cu *aria paralelogramului* construit cu cei doi
baza b înmulțită cu înălțimea $a \sin \alpha$).

Produsul vectorial a doi vectori *coliniari* sau *paraleli* este *nul* ($\sin 0° = 0$, $\sin 180° = 0$) (de exemplu dacă $\vec{r}$ și $\vec{F}$ sînt paraleli sau coliniari: forța trece prin articulație).

Dacă schimbăm ordinea factorilor, atunci trebuie să rotim pe $\vec{b}$ către $\vec{a}$, deci se schimbă sensul produsului vectorial. Prin urmare, produsul vectorial este *necomutativ*:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \qquad (6.2)$$

(se spune în acest caz că produsul este anticomutativ).

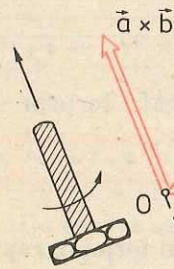


Fig. 6.2. Prod
vectori $\vec{a} \times \vec{b}$ es
$ab \sin \alpha$, cu dir
$(\vec{a}, \vec{b})$ și cu sen
ghiul

Dacă schimbăm sensul unuia dintre vectori, se schimbă și sensul vectorului produs.

Se poate verifica faptul că produsul vectorial este *distributiv:*

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \text{ și } (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}, \quad (6.3)$$

unde, bineînțeles, nu trebuie schimbată *ordinea* factorilor!

Momentul unei forțe în raport cu un punct, numit pol, este definit prin produsul vectorial dintre vectorul de poziție al originii forței față de pol și vectorul forță:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad |\vec{M}| = M = rF \sin \alpha = bF. \quad (6.4)$$

Trebuie reținută *ordinea* factorilor: $\vec{r} \times \vec{F}$ și *nu* $\vec{F} \times \vec{r}$. Dacă schimbăm sensul forței, se schimbă și sensul vectorului moment.

Momentul forței se măsoară în N · m.

(Atenție, produsul N · m nu trebuie înlocuit cu joule, fiindcă nu reprezintă lucrul mecanic.)

Din figura 6.1 se vede că momentul forței nu depinde de poziția forței pe dreapta suport: nu se schimbă nici modulul $rF \sin \alpha = bF$ (dublul ariei triunghiului OAB), nici direcția sau sensul. Momentul forței este zero dacă polul se află pe suportul forței deoarece atunci brațul forței este zero ($\vec{r}$ și $\vec{F}$ sînt paraleli).

Dacă asupra unui punct material P acționează mai multe forțe concurente $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, atunci fiecare forță dă un moment în raport cu un pol O:

$$\vec{M}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1, \quad \vec{M}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2, \ldots, \vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_n, \quad (\vec{r} = \overrightarrow{OP}).$$

Adunînd aceste egalități membru cu membru, avem:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r} \times \vec{F}_n =$$
$$= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \quad (6.5)$$

unde $\vec{F}$ este rezultanta forțelor concurente și $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ — momentul ei.

Suma vectorială a momentelor forțelor concurente în raport cu un pol este egală cu momentul rezultantei acestor forțe în raport cu același pol (teorema lui Varignon).

6.1.2. **Momentul forței în raport cu o axă.** Fie acum un corp care se poate roti liber în jurul unei axe fixe (fig. 6.3). Dacă forța aplicată corpului este *paralelă* cu axa de rotație sau intersectează axa de rotație, ea nu poate roti corpul, ci doar îndoaie axa sau trage de axă. De aceea descompunem forța $\vec{F}$ în două forțe componente: $\vec{F}_{\parallel}$ *paralelă* cu axa de rotație și $\vec{F}_{\perp}$ *perpendiculară* pe axă. Forța componentă $\vec{F}_{\parallel}$ nu poate roti corpul, ci doar îndoaie axa (trage corpul paralel cu axa); momentul ei în raport cu un punct de pe axă ($M_{\parallel}$) este perpendicular pe axa de rotație și tinde să îndoaie axa. Numai forța componentă transversală $\vec{F}_{\perp}$ (perpendiculară pe axa de rotație) poate roti corpul în jurul axei în planul (π) perpendicular pe axă; momentul ei $M_{\parallel} = F_{\perp} \cdot b$ în raport cu punctul C — piciorul perpendicularei din P pe axă, este paralel cu axa și el este acela care rotește corpul în jurul axei.

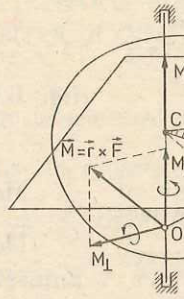


Fig. 6.3. Comp
de rotație nu
ei $M_{\perp}$ este pe
doar să îndoai
perpendiculară
jurul axei și dă

Momentul unei forțe $\vec{F}$ în raport cu o axă este egal cu produsul dintre componenta transversală a forței $F_{\perp}$ și brațul său b pînă la axă, în planul perpendicular pe axă (π), *prevăzut cu semnul plus sau minus, după cum rotația produsă corespunde sau nu* (după regula burghiului) *sensului pozitiv al axei*: $M_{\parallel} = \pm b \cdot F_{\perp}$.

Dacă luăm momentul forței $\vec{F}$ față de un pol O de pe axă, $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, atunci componenta vectorului $\vec{M}$ pe axă va fi tocmai $M_{\parallel} = \pm bF_{\perp}$.

Dacă asupra unui corp acționează mai multe forțe, atunci momentele lor față de același pol se compun după regula paralelogramului, ca orice vectori. Momentele lor în raport cu o axă se adună algebric (ținînd seama de semnul lor). Dacă momentul rezultant în raport cu o axă este nul, corpul va fi în echilibru de rotație față de acea axă.

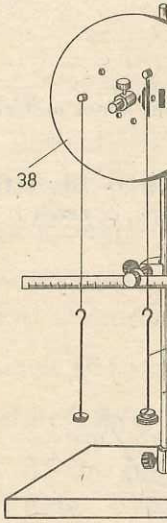


Fig. 6.4. Monta
neri

Experiment. Compunerea momentelor în raport cu

Montajul este arătat în figura 6.4. Se aleg două
(*38*) în care se introduc cepii de plastic (*47*). De cepi se
pentru greutăți crestate prin intermediul a două fire
greutățile crestate împreună cu cîrligele și cepii (5 g).

Se calculează momentele celor două forțe în rapor
sînt de semne opuse și trebuie să fie egale în modul —

Se schimbă greutățile și orificiile și se repetă expe

6.1.3. **Momentul cinetic al punctului material.** An
forțe în raport cu un pol sau o axă, se poate defini m

Interes fizic deosebit prezintă momentul *impulsul*

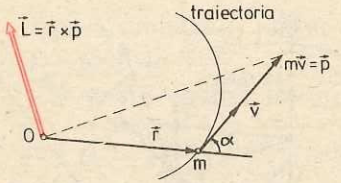


Fig. 6.5. Momentul cinetic al unui punct material este momentul impulsului: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{mv}$.

Momentul cinetic al unui punct material în raport cu un pol este momentul impulsului (fig. 6.5):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{mv}. \qquad (6.6)$$

Momentul cinetic se măsoară în J.s.

Momentul cinetic $\vec{L}$ definit mai sus se mai numeşte moment cinetic *orbital*, deoarece este legat de mişcarea particulei pe *orbita sa*. (Particulele atomice pot avea şi un moment cinetic *propriu* $\vec{S}$ numit spin, atunci momentul cinetic total al particulei va fi $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.)

EXEMPLE

1. Momentul cinetic al unui punct material *izolat*, în raport cu orice pol, *se conservă* (este constant).

   În adevăr, în timpul mişcării sale rectilinii uniforme impulsul $\vec{mv}$ este constant, doar lunecă pe dreapta mişcării, de aceea $L = mv \cdot b = \text{const.}$, la fel, direcţia şi sensul rămîn neschimbate (fig. 6.6).

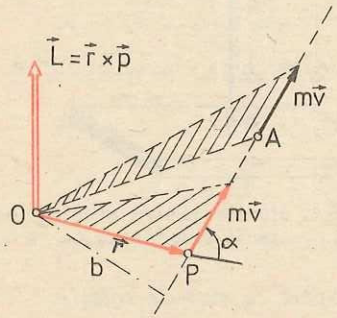


Fig. 6.6. Momentul cinetic al unui punct material izolat, deci în mişcare rectilinie uniformă, în raport cu orice pol, se conservă.

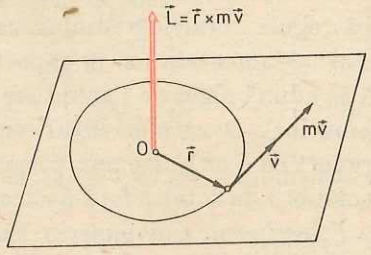


Fig. 6.7. La mişcarea circulară uniformă, momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului se conservă (fiindcă momentul forţei este zero faţă de acest pol).

2. În mişcarea circulară *uniformă*, momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului *se conservă* (fig. 6.7).
   În adevăr, modulul momentului este constant: $L = mvr = mr^2\omega$, iar direcţia şi sensul

6.2. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC PENTRU PUNC CONSERVAREA MOMENTULUI CINETI

Să calculăm variaţia momentului cinetic pe unitatea d t, momentul cinetic este $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. La un moment a vectorul de poziţie $\vec{r}$ devine $\vec{r'} = \vec{r} + \Delta\vec{r}$ şi viteza $\vec{v}$ iar impulsul $\vec{p} = m\vec{v}$ devine $\vec{p'} = m\vec{v'} = \vec{p} + \Delta\vec{p} =$ momentul cinetic $\vec{L}$ devine:

$$\vec{L'} = \vec{r'} \times \vec{p'} = (\vec{r} + \Delta\vec{r}) \times (\vec{p} + \Delta\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$+ \Delta\vec{r} \times \vec{p} + \Delta\vec{r} \times \Delta\vec{p},$$

de unde variaţia momentului cinetic raportată la inte pectiv Δt:

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \frac{\vec{L'} - \vec{L}}{\Delta t} = \vec{r} \times \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} + \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \times \vec{mv} + \Delta$$

Pentru a găsi variaţia „momentană“ (sau „instantanee“) pe unitatea de timp, facem, după cum ştim, pe Δt să (să tindă către zero: $\Delta t \to 0$), atunci, bineînţeles, şi $\Delta\vec{r}$ zero, dar raportul $\Delta\vec{r}/\Delta t$ devine viteza momentană $\vec{v}$, ia cu forţa $\vec{F}$ (conform principiului II). Atunci ultimii doi de mai sus se anulează: $\vec{v} \times \vec{mv} = 0$ deoarece sînt vecto iar ultimul termen se anulează fiindcă factorul $\Delta\vec{p}/\Delta t$ de iar factorul $\Delta\vec{r}$ se anulează cînd $\Delta t \to 0$. Rămîne numa membrul drept care reprezintă momentul forţei. Obţine *mentului cinetic* pentru punctul material.

Momentul forţei în raport cu un pol este egal cu cinetic pe unitatea de timp, în raport cu acelaşi pol.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \text{ cînd } \Delta t \to 0, \quad (\text{adică } \vec{M} =$$

Dacă momentul forţei rezultante în raport cu un po variaţia momentului cinetic al punctului material va fi cinetic în raport cu acel pol *se conservă*. Un punct materia momentul său cinetic decît sub acţiunea unui moment al

De exemplu în cazul unui punct material *izolat*, faţă de orice pol, de aceea momentul cinetic $\vec{L}$ în raport cu

În mișcarea circulară *uniformă* forța este *centripetă*, deci momentul ei în raport cu *centrul* cercului este permanent zero, de aceea momentul cinetic al punctului material în raport cu *centrul* cercului *se conservă*.

În mișcarea planetelor în jurul Soarelui forța de atracție gravitațională exercitată de Soare asupra planetei trece permanent prin centrul Soarelui, de aceea momentul forței în raport cu Soarele este nul, deci momentul cinetic al planetei în raport cu Soarele se conservă. Analog se întîmplă în mișcarea electronilor în jurul nucleului într-un atom.

Dacă momentul rezultant al unei forțe în raport cu o *axă* este zero, atunci momentul cinetic în raport cu *acea axă se conservă* (este constant).

Analog impulsului, momentul cinetic este și el o măsură a mișcării din punctul de vedere al rotației: teorema momentului cinetic exprimă o lege de conservare a mișcării mecanice, transmise de la un corp la altul prin intermediul momentului forței în procesul interacțiunii. Ecuația (6.7) este analoagă cu ecuația fundamentală a dinamicii: forței îi corespunde momentul forței, iar impulsului îi corespunde momentul impulsului, adică momentul cinetic.

Ecuația (6.7) exprimă legea fundamentală a dinamicii pentru mișcarea de rotație.

6.3. TEOREMA MOMENTULUI CINETIC TOTAL AL UNUI SISTEM MECANIC. CONSERVAREA MOMENTULUI CINETIC TOTAL

Fie un sistem de două particule (fig. 6.8). Momentele celor două forțe interne $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ și $\vec{\mathcal{F}}_{21} = -\vec{\mathcal{F}}_{12}$ în raport cu un pol O sînt egale în modul și de sensuri opuse $\vec{\mathfrak{M}}_{12} = -\vec{\mathfrak{M}}_{21}$ sau $\vec{\mathfrak{M}}_{12} + \vec{\mathfrak{M}}_{21} = 0$. În adevăr, modulele momentelor sînt egale: $|\vec{\mathcal{F}}_{12}| \cdot b = |\vec{\mathcal{F}}_{21}| \cdot b$ (avînd același braț, b); direcția, este aceeași—perpendiculară pe planul (O, $\vec{\mathcal{F}}_{12}$, $\vec{\mathcal{F}}_{21}$), iar sensurile sînt opuse deoarece forțele $\vec{\mathcal{F}}_{12}$ și $\vec{\mathcal{F}}_{21}$ sînt de sensuri opuse.

Momentul rezultant al forțelor interne ale unui sistem de particule, în raport cu orice pol, este nul.

Rezultatul este valabil pentru un sistem format dintr-un număr *oarecare* de particule. În adevăr, forțele interne de interacțiune dintre particulele sistemului sînt totdeauna *perechi*, acțiunea și reacțiunea, egale în modul și de sensuri opuse și acționează pe aceeași dreaptă care unește cele două particule (principiul III). Deci momentele lor, față de orice pol, vor fi egale în modul și de sensuri opuse. De aceea dacă însumăm momentele pentru întregul sistem ele se anulează două cîte două și momentul rezultant va fi nul.

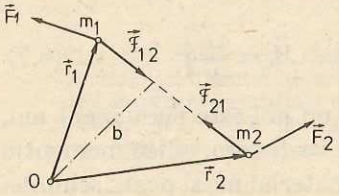


Fig. 6.8. Momentul rezultant al forțelor interne ale unui sistem de particule, în raport cu orice pol, este zero.

Să scriem teorema momentului cinetic pentru fiecare particulă (se consideră mai jos momentele medii pe intervalul de timp Δt):

$$\vec{M}_1 + \vec{\mathfrak{M}}_1 = \frac{\Delta \vec{L}_1}{\Delta t}, \quad \vec{M}_2 + \vec{\mathfrak{M}}_2 = \frac{\Delta \vec{L}_2}{\Delta t},$$

unde $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ sînt momentele forțelor *externe* care acționează asupra particulei *1*, respectiv *2*, iar $\vec{\mathfrak{M}}_1$, $\vec{\mathfrak{M}}_2$ sînt momentele forțelor *interne* care acționează asupra acestor particule (fig. 6.8). Adunînd membru cu membru cele două ec
momentul rezultant al forțelor interne este nul, obținem:

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = \frac{\Delta \vec{L}_1}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{L}_2}{\Delta t} = \frac{\Delta(\vec{L}_1 + \vec{L}$$

Rezultatul este valabil și pentru un sistem format dintr-un
materiale:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = \frac{\Delta(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \ldots +$$

unde $\vec{M}$ este momentul rezultant al forțelor *externe*, iar $\vec{J}$ m
sistemului.

Proiectînd ecuația (6.8) pe o axă, obținem

$$M_{\parallel} = \frac{\Delta J_{\parallel}}{\Delta t},$$

unde $M_{\parallel}$ este momentul rezultant în raport cu axa, iar $J_{\parallel}$ es
în raport cu axa.

Dacă sistemul este *izolat* ($\vec{M} \equiv 0$), momentul cinetic tot
orice pol sau axă, *se conservă*.

Dacă momentul rezultant al forțelor externe în raport cu un
este permanent nul, *momentul cinetic total al sistemului în raport*
se conservă.

Prin urmare *forțele interne nu pot modifica momentul cin*
pot doar redistribui între părțile sistemului). Numai prin intera
se transmite mișcarea și se schimbă momentul cinetic total al

Dacă momentul rezultant al forțelor externe aplicate unu
punct, este nul, corpul nu se va roti în jurul nici unei axe trecînd
dacă momentul rezultant al forțelor externe aplicate corpului în
corpul nu se va roti în jurul acelei axe (se presupune că inițial c
acelei axe).

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. O particulă în mișcare este supusă la o forță a cărei dreaptă
punct fix. Ce se poate spune despre momentul cinetic al parti

R: se con

2. Se conservă momentul cinetic în raport cu Soarele al unei co
pe o traiectorie parabolică? Dar în cazul planetelor care nu
circulare?

3. Dacă vectorul moment cinetic al unei particule este constant
sa este plană. De ce? Dar dacă numai direcția vectorului mo
este traiectoria?

R: $\vec{L}$

4. Asupra unui satelit artificial al Pămîntului acţionează o forţă de frecare cu aerul $\vec{F}_f = -k\vec{v}$. Se conservă momentul său cinetic în raport cu centrul Pămîntului? Rămîne traiectoria sa plană?

R: nu; da.

5*. Se conservă momentul cinetic total al particulelor rezultate în urma exploziei unui corp izolat?

R: da.

6. O particulă se mişcă în vid sub acţiunea forţei de greutate. Momentul cinetic în raport cu orice axă din planul mişcării se conservă. De ce? Ce valoare are?

R: $\vec{G}$ şi $\vec{p}$ sînt incidente cu axa: $M_{\parallel} = L_{\parallel} \equiv 0$.

7*. O particulă suspendată printr-un fir oscilează într-un plan vertical (pendul simplu). Care este momentul cinetic faţă de verticala prin punctul de suspensie? Care este variaţia pe unitatea de timp a momentului cinetic în raport cu punctul de suspensie?

R: zero; $|\Delta\vec{L}/\Delta t| = mgl\sin 0$.

7

CINEMATICA ŞI DINAMICA RIGI

7.1. NOŢIUNEA DE RIGID

Pe un plan înclinat se lasă să se rostogolească un cilindru cilindri avînd acelaşi diametru şi aceeaşi masă. Se constată că într-un timp mai scurt decît cilindrul gol.

Experienţa arată că în acest caz nu mai putem considera co riale; modelul de punct material folosit pînă acum în mecanică nu tatul acestei experienţe. Trebuie să luăm în consideraţie forma, din este distribuită masa corpurilor.

Un corp cu anumite dimensiuni poate avea în urma acţiunii cării centrului de masă şi mişcări suplimentare. Aceste mişcări po corp sau numai de anumite părţi ale lui şi se suprapun peste mişc

Să considerăm un caz simplu, acela în care corpul nu are pă Punctele materiale din care se consideră alcătuit corpul nu efect ansamblu. Acest corp se numeşte rigid.

Un corp rigid este un sistem de puncte materiale ale căror neschimbate.

Ca şi punctul material, corpul rigid este un model. Acest m bună aproximaţie de o bilă de oţel, de o roată, un cilindru, o ba

7.2. VITEZA ŞI ACCELERAŢIA UNGHIU

EXPERIMENT

Pe un plan înclinat sau un jgheab, se lasă să se mişte liber o mişcare de translaţie accelerată şi în acelaşi timp efectuează ş (fig. 7.1).

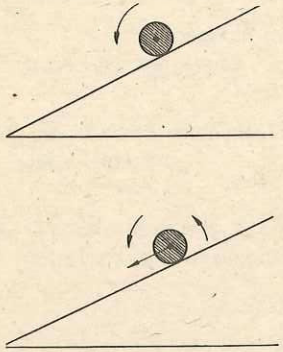


Fig. 7.1. O bilă în mişcare pe un plan înclinat.

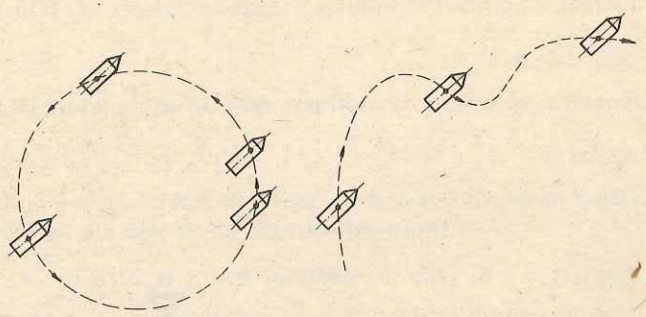


Fig. 7.2. În mişcarea de translaţie traiectoriile, vitezele şi acceleraţiile tuturor punctelor corpului sînt identice.

Atît această experienţă cît şi altele asemănătoare ne arată că un corp rigid se poate afla în mişcare de translaţie, în mişcare de rotaţie în jurul unei axe sau într-o mişcare elicoidală, rotaţie şi translaţie simultan.

Mişcarea de translaţie a unui corp rigid este mişcarea în care orice dreaptă legată de corp îşi păstrează orientarea, adică se mişcă paralel cu ea însăşi.

În această mişcare toate punctele corpului rigid au traiectorii, viteze şi acceleraţii identice şi de aceea această mişcare este determinată prin mişcarea unui singur punct material ce aparţine corpului (fig. 7.2).

Mişcarea de rotaţie a unui rigid este mişcarea în care toate punctele sale descriu cercuri ale căror centre sînt situate pe o dreaptă perpendiculară pe planul cercurilor descrise, dreaptă numită axă de rotaţie (fig. 7.3).

Razele vectoare ale punctelor diferite din corpul rigid vor descrie acelaşi unghi $\Delta\alpha$ în intervalul de timp Δt. Deci viteza unghiulară ω va fi aceeaşi pentru toate punctele corpului rigid în rotaţie:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}. \qquad (7.1)$$

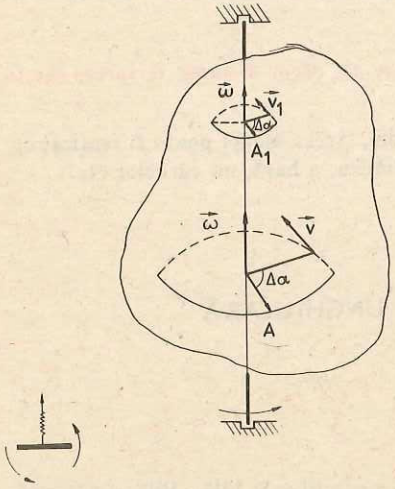


Fig. 7.3. Punctele unui solid rigid aflat în mişcare de rotaţie descriu cercuri cu centrul pe axa de rotaţie.

Vitezele liniare ale diferitelor puncte ale rigidului sînt diferite deoarece şi razele cercurilor descrise sînt diferite:

$$v_i = \omega r_i. \qquad (7.2)$$

Viteza unghiulară ω este considerată o mărime vectorială, deci poate fi reprezentată printr-un vector. Vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ are direcţia axei de rotaţie, este deci perpendicular pe planul traiectoriei. Sensul acestui vector este determinat prin regula şurubului drept (fig. 7.3).

Datorită relaţiei $v = \omega r$, a felului în care s-a ales direcţia şi sensul vectorului $\vec{\omega}$, se poate reprezenta viteza liniară $\vec{v}$ a mişcării unuia din punctele ce alcătuiesc rigidul, ca produs vectorial al vectorilor $\vec{\omega}$ şi $\vec{r}$.:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (7.3)$$

Vectorul produs vectorial $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ este perpendicular pe planul format de cei doi vectori, avînd sensul înaintării unui şurub drept (fig. 7.4). Mărimea acestui vector este $v = \omega r \sin (\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = \omega r$ deoarece unghiul $(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = 90°$.

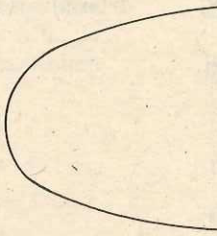


Fig. 7.4. Viteza ung vec

Dacă vectorul viteză unghiulară $\vec{\omega}$ este constant în timp, uniformă.

În cazul în care rigidul se roteşte în aşa fel încît viteza ungh în timp, mişcarea de rotaţie este neuniformă, atunci relaţia:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

defineşte mărimea numită *acceleraţie unghiulară*. Ca şi viteza u unghiulară $\vec{\varepsilon}$ se reprezintă printr-un vector şi în cazul unei ax acestui vector este aceeaşi cu direcţia vectorului $\vec{\omega}$. În SI mărim

$$[\omega]_{SI} = \text{rad/s} = \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ respectiv } [\varepsilon]_{SI} = \text{ra}$$

EXPERIMENTE

a) Determinarea vitezei unghiulare ω. Se realizează un m cum arată figura 7.5. Măsurarea timpului în care este descris un zează cu dispozitivul electrochimic ataşat trusei de mecanică sa cu secundar. Montajul electric este cel indicat în figura 7. montaj, se fixează două întrerupătoare în sensul rotirii tambu unghi α. Acţionarea întrerupătoarelor o face un indicator care se r De firul trecut peste scripete, se suspendă cîrligul pentru disc impuls, tija cu cele două discuri la capete începe să se rotească ap timpul t în care este descris unghiul α se determină viteza ungh experienţa pentru alte unghiuri, rezultatele obţinute pot fi com tabel de forma:

t(s)	$t_1, t_2 \ldots t$
α (rad)	$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha$
ω (rad/s)	

b) Determinarea acceleraţiei unghiulare ε. La montajul ante introducînd peste tamburul cu raza de 20 mm un alt tambur cu zitivul de măsurare a timpului nu mai este folosit acum. Se suspe rile crestate de firul trecut peste scripete. Pe cîrlig este introdus

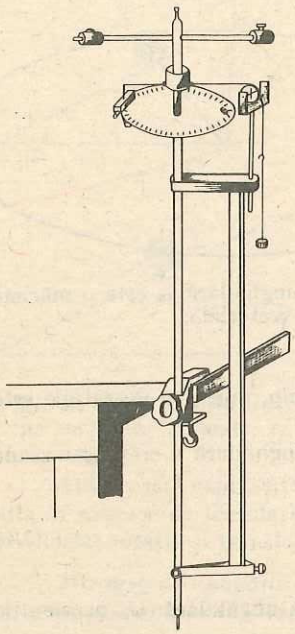


Fig. 7.5. Montaj experimental pentru determinarea vitezei unghiulare.

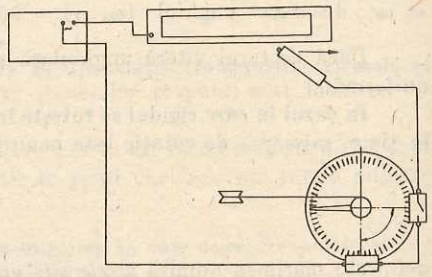


Fig. 7.6. Montajul electric pentru experimentul din figura 7.5.

Pe bara divizată a montajului, se aleg două repere, unul superior și altul inferior care delimitează o distanță h.

Se rotește bara (tija) pînă cînd cîrligul cu discurile crestate ajunge în dreptul reperului superior. Din acest moment sistemul este lăsat liber și se măsoară timpul t în care este parcurs spațiul h. Timpul se măsoară cu ajutorul unui ceas cu secundar sau cu un cronometru. Din ecuațiile mișcării uniform accelerate $\omega = \varepsilon t$ și $\alpha = \frac{\varepsilon}{2} t^2$, unde $\alpha = h/r$ r fiind raza tamburului, rezultă pentru accelerația unghiulară ε expresia:

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}.$$

7.3. ENERGIA CINETICĂ DE ROTAȚIE. MOMENTUL DE INERȚIE AL UNUI RIGID

EXPERIMENT

Se realizează montajul pentru determinarea vitezei unghiulare (fig. 7.5). Pe cîrlig se așază discuri crestate cu mase de 50 g. Se înfășoară firul pe tambur pînă cînd cîrligul este adus la partea superioară a barei divizate. Se lasă sistemul liber. Acesta va efectua o mișcare de rotație uniform accelerată. După desfășurarea completă a firului, mișcarea de rotație continuă, firul cu discurile crestate urcă, sistemul efectuează un lucru mecanic pentru ridicarea discurilor. Rezultă de aici că în timpul mișcării de rotație la coborîre, variația energiei potențiale a greutății a produs variația energiei cinetice (creșterea acestei energii) a sistemului care a realizat un lucru mecanic, adică ridicarea discurilor.

De cine depinde energia cinetică de rotație?

Să considerăm un rigid care se rotește cu viteza unghiulară, constantă, în jurul unei axe fixe (fig. 7.7). Un punct material de masă m aflat la distanța r de axa de rotație are viteza liniară $v = \omega r$ și energia cinetică:

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} mr^2\omega^2.$$

Expresia mr^2 se numește moment de inerție al unui punct material față de o axă.

Dacă însumăm energiile cinetice ale tuturor punctelor rigidului, obținem energia cinetică totală a solidului aflat în mișcare de rotație cu viteza unghiulară constantă ω:

$$E_{c,\,rot} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2} m_k r_k^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{k=1}^{k=n} m_k r_k^2. \quad (7.5)$$

Expresia:

$$I = \sum_{k=1}^{k=n} m_k r_k^2 \quad (7.6)$$

se numește *moment de inerție al rigidului* față de axa de rotație considerată.

Din definiția momentului de inerție (7.6) rezultă că SI este

$$[I]_{SI} = [m][r^2] = \text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Observați că momentul de inerție al unui rigid este egal inerție ale particulelor componente ale rigidului. Din relația (7.5) (7.6) obținem:

$$E_{c,\,rot} = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Pentru un ω dat, energia cinetică de rotație este cu atît materiale, care alcătuiesc rigidul, sînt distribuite la distanțe rotație, deci cu cît momentul de inerție este mai mare.

Energia cinetică a unui solid rigid aflat în mișcare de tran calcula prin relația:

$$E_c = \frac{1}{2} m_s v^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

unde m_s reprezintă masa rigidului, v — viteza centrului de mas față de axa de rotație ce trece prin centrul de masă.

Dacă se face comparație între energia cinetică de trans

și energia cinetică de rotație, $E_{c,\,rot} = \frac{1}{2} I\omega^2$ se observă că r

de translație, îl are, la mișcarea de rotație, momentul de inerți de inerție I depinde nu numai de valoarea maselor punctelor rigidul considerat ci și de distanțele (distribuția) lor față de ax

La o aceeași masă totală, sclidul care are punctele materia avea un moment de inerție mai mare. De exemplu, momentul gol de grosime neglijabilă, este mai mare decît cel al unu

aceeaşi masă cu primul, ambele calculate faţă de axa lor de simetrie. Aşadar, pentru a obţine un moment de inerţie cît mai mare substanţa din care este formal rigidul respectiv trebuie distribuită cît mai departe de axa de rotaţie.

Valoarea momentului inerţie se schimbă dacă se schimbă poziţia axei de rotaţie.

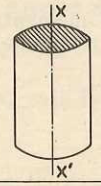
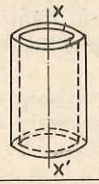
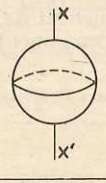
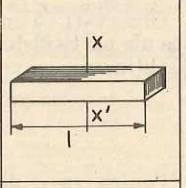
Pentru corpurile omogene de formă geometrică regulată momentele de inerţie pot fi calculate prin metode matematice. Pentru corpurile de formă carecare momentele de inerţie pot fi determinate experimental.

EXPERIMENT

Montajul experimental folosit pentru determinarea acceleraţiei unghiulare (fig. 7.5) poate fi utilizat pentru a pune în evidenţă momentul de inerţie. Se pune sistemul în mişcare cu o acceleraţie mică, sub acţiunea discurilor crestate. Se observă cu atenţie această mişcare. Se mută corpurile (greutăţile) cu şurub de la capetele tijei mai spre centru. Se lasă iarăşi sistemul liber şi se observă că mişcarea are o acceleraţie mai mare. Deci pentru aceeaşi forţă, pentru aceeaşi masă dar altfel distribuită, efectele sînt diferite. Se repetă experimentul şi se înlocuiesc corpurile de pe tijă cu alte două mai mici, de 100 g fiecare. Se va constata că pentru aceleaşi poziţii ale corpurilor, efectele aceleiaşi forţe sînt altele.

Rezultă că într-o mişcare de rotaţie, inerţia sistemului depinde atît de masa lui cît şi de distribuţia acestei mase în raport cu axa de rotaţie. În tabelul următor sînt date expresiile momentelor de inerţie pentru cîteva corpuri rigide, omogene, de formă geometrică regulată faţă de axele de rotaţie indicate.

Tabelul 7.1.

Cilindru plin	Cilindru gol	Inel cilindric	Sferă plină	Bară subţire
				
$I=\frac{1}{2}mR^2$	$I=mR^2$	$I=\frac{1}{2}m(R^2+r^2)$	$I=\frac{2}{5}mR^2$	$I=\frac{1}{12}ml^2$

7.4. LEGILE CINEMATICII ŞI DINAMICII SOLIDULUI RIGID

Să analizăm mişcarea de rotaţie a unui rigid sub acţiunea unei forţe $\vec{F}$ sau a unui sistem de forţe, cînd axa de rotaţie este fixă (fig. 7.8). Asupra fiecărui punct material de masă m_i acţionează forţa $\vec{F}_i$:

$$\vec{F}_i = m_i \cdot \vec{a}_i \qquad (7.9)$$

unde $\vec{a}_i$ este acceleraţia mişcării punctului material sub acţiunea forţei $\vec{F}_i$.

În mişcarea de rotaţie a rigidului în jurul axei fixe, fiecare punct material se poate deplasa numai în planul perpendicular pe axă pe cercul de rază r_i, unde r_i este distanţa de la punctul material m_i pînă la axa de rotaţie. Astfel, pentru a descrie mişcarea de rotaţie a punctului material putem considera numai relaţia între componenta tangenţială F_{it} a forţei $\vec{F}_i$ şi acceleraţia tangenţială a_{it}:

$$F_{it} = m_i a_{it} \qquad (7.10)$$

adică ecuaţia (7.9) proiectată pe tangenta la traiectoria circulară a punctului material considerat. Dar:

$$a_{it} = \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \text{ şi } v_i = \omega r_i \text{ şi deci } a_{it} = r_i \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = r_i \varepsilon \qquad (7.11)$$

unde $\varepsilon = \frac{\Delta \omega}{\Delta t}$ este *acceleraţia unghiulară*.

Înmulţind ambii membri ai ecuaţiei (7.10) cu r_i şi ţinînd seama de (7.11) avem:

$$r_i F_{it} = m_i r_i^2 \varepsilon. \qquad (7.12)$$

După cum am văzut în paragraful 6.1.2 momentul forţei $\vec{F}_i$ faţă de axa de rotaţie este definit de produsul dintre componenta transversală $\vec{F}_{i\perp}$ (proiecţia forţei F_i pe planul perpendicular pe axă) şi braţul acesteia pînă la axă, ceea ce este totuna cu produsul $r_i F_{it}$ dintre componenta tangenţială a forţei şi distanţa de la punctul material la axă. Astfel, no

stînd din relaţia (7.12) reprezintă valoarea momentului for rotaţie. Aşadar, pentru întreg corpul rigid, putem scrie va tant faţă de axa de rotaţie:

$$M_{||} = \sum_{i=1}^{n} M_{i||} = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

adică:

$$M_{||} = I\varepsilon$$

unde $I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ este momentul de inerţie al rigidului faţă d

Tot în paragraful 6.1.2 am văzut că momentul unei forţe cu proiecţia pe axa respectivă a momentului acelei forţe faţă fel, avînd în vedere că momentul rezultant al forţelor inte nul, în relaţia (7.13) $M_{||}$ reprezintă valoarea momentului re faţă de axa de rotaţie sau, ceea ce este totuna, proiecţia pe ax rezultant al forţelor externe faţă de un pol de pe axă.

Observăm că ecuaţia (7.13) reprezintă particularizarea ecua la cazul rigidului cu axă fixă. Într-adevăr, valoarea momentu material m_i faţă de axa de rotaţie este $J_{i||} = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \omega$ de gul corp rigid:

$$J_{||} = \sum_{i=1}^{n} J_{i||} = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 \omega = I\omega.$$

Avînd în vedere că momentul de inerție I este constant și că $\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \varepsilon$ și ținînd cont de ecuația (6.9) rezultă ecuația (7.13).

Relația (7.13) reprezintă legea a II-a a dinamicii pentru mișcarea de rotație a unui rigid cu axă fixă.

Accelerația unghiulară imprimată de forțele exterioare unui rigid cu axă fixă de rotație este direct proporțională cu momentul rezultant al acestor forțe în raport cu axa de rotație.

Dacă momentul rezultant al forțelor exterioare față de axa de rotație este permanent nul atunci din relația (7.13) rezultă că accelerația unghiulară ε este nulă deci corpul rigid este în repaus sau se rotește în jurul axei cu o viteză unghiulară ω constantă.

EXPERIMENT

Determinarea momentului de inerție al unui corp. Realizăm montajul folosit pentru determinarea accelerației unghiulare (fig. 7.5). Se fixează corpurile cu șurub cu masa de 150 g fiecare la capetele barei. Momentul de inerție al sistemului este suficient de mare pentru a putea fi neglijat momentul de inerție al barei. Suspendînd de fir cîrligul, se realizează o mișcare de rotație uniformă. Se mai pune apoi un corp cu masa $m = 20$ g care va imprima sistemului o accelerație unghiulară ε și o accelerație $\vec{a}$ pe verticală. Din legea fundamentală pentru mișcarea de rotație $M = I\varepsilon$ rezultă:

$$I = \frac{M}{\varepsilon}.$$

Din $M = Tr$ unde $T = m(g - a)$ (vezi fig. 7.9) și $a = \frac{2h}{t^2}$ avem $M = mr\,(g - a)$.

Dar, $\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}$ și înlocuind în expresia momentului de inerție I vom obține:

$$I = \frac{mr^2}{2h}\,(gt^2 - 2h).$$

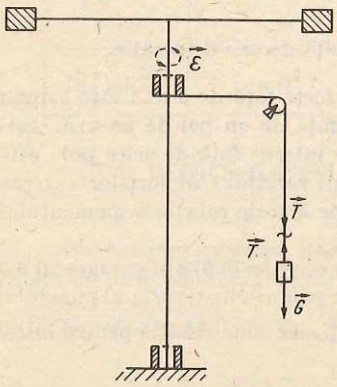


Fig. 7.9. Forțele ce acționează asupra corpului din experiment.

Se măsoară timpul t de cădere, masa m care produce mișcarea uniform accelerată și spațiul h pe care se deplasează discul crestat suspendat de cîrlig. Cu valorile obținute se calculează momentul de inerție al sistemului.

Volantul. Pentru ca o mașină să funcționeze în bune condiții trebuie ca variațiile vitezei de mișcare să nu depășească anumite valori stabilite prin construcție.

La majoritatea mașinilor se cere menținerea vitezei constante, astfel încît în orice moment să avem egalitate între energia mecanică primită și energia consumată de mașină.

În cazul variațiilor periodice ale vitezei din relația $M = I\varepsilon$ care poate fi scrisă și sub forma $M\,\Delta t = I\,\Delta\omega$ rezultă

$$\Delta\omega = \frac{M\Delta t}{I}$$

expresie din care se vede că variațiile vitezei unghiulare $\Delta\omega$ pe forței, determinat, sînt cu atît mai mici cu cît momentul de ine mare.

Mărirea considerabilă a momentului de inerție al unei maș unei roți (disc) mari numită volant, montată pe arborele mașinii.

Volantul reprezintă un „acumulator" de energie cinetică. Î funcționare al mașinii, în timpul cînd lucrul mecanic al forțelo acela al forțelor rezistente, energia cinetică a mașinii crește ș energie cinetică. Excesul de lucru mecanic al forțelor motoare fa tente fiind consumat pentru creșterea energiei cinetice a volan creșterea vitezei mașinii peste valoarea ei medie (de regim).

În timpul cînd lucrul mecanic al forțelor rezistente depăș motoare, energia cinetică a mașinii scade și deci scade și viteza tuie" acum, mașinii, sub formă de lucru mecanic motor, energia cir O parte din lucrul mecanic al forțelor rezistente consumîndu-se tului, rezultă că în acest interval de timp din ciclul mașinii, vola vitezei sub valoarea ei medie.

În consecință, în decursul unui ciclu energetic al mașinii, vol cinetică în exces pe timpul cît mașina tinde să se ambaleze pentr mașina își încetinește mersul, menținînd astfel variațiile periodi jurul valorii vitezei medii (de regim).

Între mișcarea de translație și mișcarea de rotație se poa corespondență analogică. Mărimile și ecuațiile între care se pot s date în tabelul care urmează:

Translație

CINEMATICA

Mărimea; tipul de mișcare	*Ecuația; simbolul*	*Unitatea de măsură*	*Mărimea; tipul de mișcare*	*Ecu sim*
Vectorul deplasare	$\vec{\Delta r}$	m	Unghiul	
Timpul	t	s	Timpul	
Viteza	$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$	m/s	Viteza unghiulară	$\omega =$
Mișcarea uniformă	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$		Rotație uniformă	$\alpha =$
Accelerația	$\vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$	m/s²	Accelerație unghiulară	$\varepsilon =$
Mișcarea uniform variată	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$		Rotație uniform variată	$\omega =$
	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$			$\alpha =$

Mărimea;	*Ecuația; simbolul*	*Unitatea de măsură*	*Mărimea;*	*Ecuația; simbolul*	*Unitatea de măsură*
Masa	m	kg	Momentul de inerție	I	kg · m²
Forța	F	N	Momentul forței	M	N · m
Impulsul	$\vec{p} = m\vec{v}$	kg · m/s	Momentul cinetic	$\vec{J}_{\|\|} = I\vec{\omega}$	N · m
	$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = m\vec{a}$			$\vec{M}_{\|\|} = \frac{\Delta\vec{J}_{\|\|}}{\Delta t} = I\vec{\varepsilon}$	
Energia cinetică	$E_c = \frac{1}{2} mv^2$	J	Energia cinetică	$E_c = \frac{1}{2} I\omega^2$	J

PROBLEME REZOLVATE

1. Pe un plan înclinat de unghi α (fig. 7.10) se lasă liber din punctul cel mai înalt al planului un corp rotund și omogen (cilindru, sferă) de masă m, rază R și moment de inerție I. Se cer: *a)* forța de frecare și coeficientul de frecare minim dintre corp și plan astfel încît corpul să se rostogolească fără să alunece pe plan; *b)* accelerația cu care se deplasează corpul pe plan; *c)* accelerația unghiulară.

Rezolvare. a) Pentru ca între corp și planul înclinat să nu existe alunecare trebuie îndeplinite condițiile:

$$mg \sin \alpha - F_f = ma$$
$$mg \cos \alpha - N = 0$$
$$F_f R = I\varepsilon$$
$$a = \varepsilon R.$$

De unde rezultă:

$\varepsilon = \frac{a}{R}$ din ultima relație și $F_f R = I \frac{a}{R} \Rightarrow F_f = I \frac{a}{R^2}$ sau $a = F_f \frac{R^2}{I}$.

Înlocuind în prima ecuație: $mg \sin \alpha - F_f = mF_f \frac{R^2}{I}$ rezultă:

$$mg \sin \alpha = F_f \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right); \quad F_f = \frac{mg \sin \alpha}{1 + \frac{mR^2}{I}}.$$

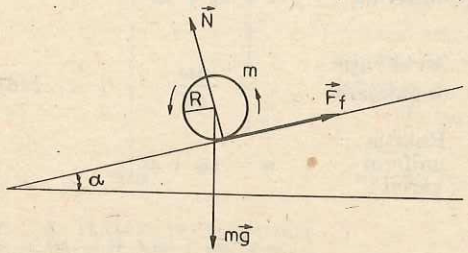


Fig. 7.10. Pentru problema rezolvată 1.

Iar condiția de nealunecare: $F_f < \mu N = \mu mg \cos \alpha$ adică

$$\mu > \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + \frac{mR^2}{I}},$$

sau $\operatorname{tg} \alpha < \mu \left(1 + \frac{mR^2}{I}\right)$.

b) Din relațiile de mai sus: $a = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I}{mR^2}}$.

c) $\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{g \sin \alpha}{R + \frac{RI}{mR^2}} = \frac{g \sin \alpha}{R + \frac{I}{mR}}$.

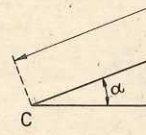


Fig. 7.11.

2. Să se determine accelerația cu care se deplasează o sferă care se rostogolește, fără alunecare, pe un plan înclinat de un unghi $\alpha = 30°$.

Rezolvare. În vîrful planului înclinat la înălțimea h față de p
sfera are energia potențială maximă $E_p = mgh$, iar la baza pl
transformă în energie cinetică. Considerînd sistemul izolat, din
servării energiei rezultă $E_c = E_p$. Energia cinetică a sferei este
cinetică de rotație și de energia cinetică de translație, adică:

$$E_c = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2},$$

dar $\omega = \frac{v}{R}$ (R este raza sferei), deoarece viteza de translație
de masă) este egală cu viteza periferică cu care se rotește sfer
deci putem scrie:

$$E_c = \frac{Iv^2}{2R^2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{v^2}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right)$$

Din egalitatea $E_c = E_p$ se obține $\frac{v^2}{2}\left(\frac{I}{R^2} + m\right) = mgh$, de un

$$v^2 = \frac{2mgh}{\frac{I}{R^2} + m}.$$

Din ecuația vitezei în mișcarea accelerată $v = \sqrt{2al}$ se obține
$= \frac{v^2}{2l}$ și înlocuind valoarea lui v^2 se obține:

$$a = \frac{mg}{\frac{I}{R^2} + m} \cdot \frac{h}{l}.$$

Dar $h = l \sin \alpha$ și se obține pentru accelerație

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{I}{R^2} + m}.$$

Știind că momentul de inerție al sferei este $I = \frac{2}{5} mR^2$,

vine: $a = \frac{mg \sin \alpha}{\frac{\frac{2}{5} mR^2}{R^2} + m} = \frac{5}{7} g \sin \alpha$ și pentru că $\sin 30°$

este $a = 3{,}5$ m/s².

Ca și în cazul mișcării de translație, valoarea accelerației în c
depinde de masa sferei ci numai de înclinarea planului.

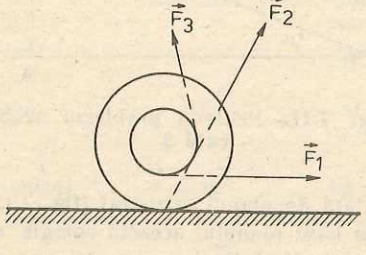


Fig. 7.12. Pentru problema 3.

1. Imaginați-vă un punct pe obada unei roți în mișcare. Dacă roata se mișcă cu viteză unghiulară constantă, are punctul considerat o accelerație normală? Dar tangențială?

2. Se fac experimente cu o sferă omogenă din lemn și cu 2 plane înclinate de unghiuri diferite. Sfera e pusă, pe rînd, pe fiecare plan la aceeași înălțime. Pe care dintre plane viteza la bază este mai mare? Cum vor fi timpii de mișcare? (Sfera se rostogolește fără alunecare.)

R: $v_1' = v_2'$, $t_1/t_2 = (\sin \alpha_2)/(\sin \alpha_1)$.

3. Un mosor avînd un fir subțire înfășurat pe el (fig. 7.12) poate fi acționat succesiv prin intermediul firului de trei forțe după direcțiile indicate în figură. Indicați direcțiile de mișcare posibile ale mosorului pentru fiecare dintre cele trei forțe.

4. Se măsoară viteza unghiulară a unui disc de pick-up și se găsește valoarea $n = 33$ rot/min. Care este viteza liniară a două puncte de pe disc unul aflat la distanța $r_1 = 14{,}9$ cm și altul la distanța $r_2 = 7{,}3$ cm de centrul discului?

R: $v = \omega r = 2\pi rn = 305$ cm/min; 152 cm/min.

5. Viteza unui automobil cu diametrul roților $D = 76$ cm este $v = 96{,}6$ km/h. *a)* Care este viteza unghiulară a roților? *b)* Roțile sînt frînate uniform în timpul a $N = 30$ de rotații. Care este accelerația unghiulară? *c)* Pe ce distanță s-a deplasat automobilul în timpul frînării?

R: $\omega_0 = 2v/D \approx 70$ rad/s; $\varepsilon = \omega_0^2/4\pi N \approx -13$ rad/s²; $s = \pi ND \approx 73$ m.

6. Discul unui pick-up se rotește cu $n = 78$ rot/min. La un moment dat discul încetinește și se oprește după $t_m = 30$ s de la deconectarea motorului. *a)* Să se calculeze accelerația unghiulară a mișcării încetinite. *b)* Numărul de rotații efectuate de disc în acest timp.

R: $\varepsilon = 2\pi n/t_m = 0{,}27$ rad/s²; $N = nt_m/2 = 20$ rotații.

8

ECHILIBRUL MECANIC AL CORP

8.1. SISTEM DE FORȚE CONCURENTE. REZULTA TRANSLAȚIE (REDUCEREA LA UN PUNC

Starea de echilibru sau de mișcare a unui corp dep turilor mecanice cu celelalte corpuri, adică de apăsăril gerile ce rezultă din acțiunile lor reciproce. După c natură acționează unele asupra altora reciproc, aceste terizate prin forțe, care sînt mărimi vectoriale.

Dacă asupra unui corp acționează simultan mai acestea formează un *sistem de forțe*. Cînd suporturile același punct, forțele sînt *concurente*.

Să considerăm un corp asupra căruia acționează sist aplicate în punctele A, B și C (fig. 8.1). Dacă se înlocu dat prin alt sistem, care produce aceleași efecte asupra inițial, spunem că cele două *sisteme de forțe sînt echivalente*. Două sisteme de forțe echivalente cu un al treilea sînt și ele echivalente. Dacă sistemul dat este echivalent cu o singură forță, aceasta este *rezultanta* sistemului de forțe.

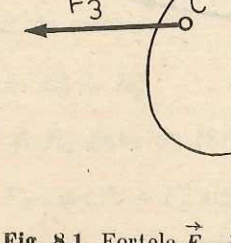


Fig. 8.1. Forțele $\vec{F}_1$, multan asupra unui s

Rezultanta forțelor se obține prin operația de compunere a forțelor, care este identică cu operația de compunere a vectorilor cunoscută din paragraful 1.6.

În cazul cînd corpul este un punct material, adică dimensiunile lui sînt neglijabile, distanțele dintre punctele de aplicație ale forțelor fiind foarte mici, acestea se pot confunda cu un singur punct pe care îl notăm cu O (fig. 8.2). Rezultă că forțele care acționează asupra unui punct material sînt concurente.

Ca urmare a neglijării dimensiunilor corpului, acesta nu poate efectua mișcări de rotație în jurul vreunei axe trecînd prin el însuși. Punctul material poate efectua numai mișcări de translație sub acțiunea forțelor care acționează asupra lui.

8.1.1. **Compunerea forțelor prin metoda analitică.** Asupra metodelor grafice de compunere a forțelor, cum ar fi metoda paralelogramului sau metoda poligonului forțelor, nu vom mai insista ele fiind cunoscute din paragraful 1.6, unde au fost aplicate pentru compunerea vectorilor. Vom prezenta numai metoda analitică de compunere a forțelor.

Metoda analitică de compunere a forțelor se bazează pe noțiunea de proiecție a forței pe o axă.

Proiectăm o forță $\vec{F}$ pe axele perpendiculare Ox și Oy, ducînd din extremitățile A și B ale forței, perpendiculare pe aceste axe (fig. 8.3).

Componentele forței $\vec{F}$ pe axele de coordonate Ox și Oy sînt date de formulele:

$$F_x = F\cos\alpha; \qquad F_y = F\sin\alpha. \tag{8.1}$$

Vom aplica metoda analitică pentru determinarea rezultantei a două forțe coplanare $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care fac între ele unghiul α. Metoda comportă următoarele etape:

1. Se ia un sistem de axe perpendiculare xOy orientat astfel încît axa Ox să aibă orientarea uneia dintre forțe. Apoi se proiectează fiecare forță pe cele două axe (fig. 8.4) și se obține:

$$F_{1x} = F_1; \qquad F_{1y} = 0,$$
$$F_{2x} = F_2\cos\alpha; \qquad F_{2y} = F_2\sin\alpha.$$

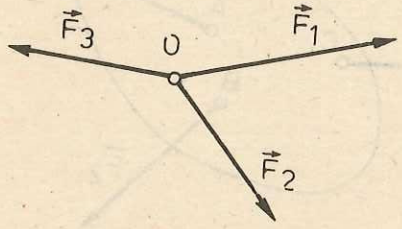


Fig. 8.2. Forțele care acționează asupra unui punct material sînt forțe concurente.

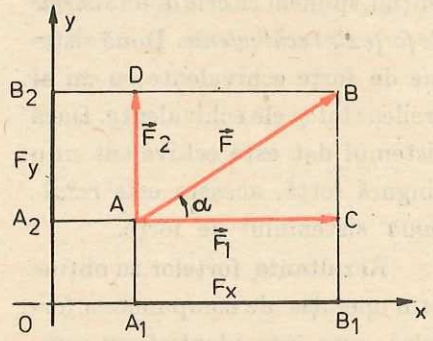
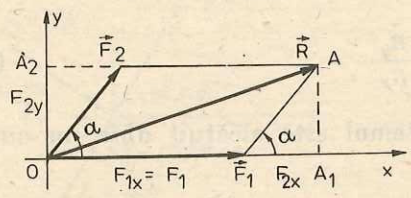


Fig. 8.3. Componentele forței $\vec{F}$ pe axele de coordonate Ox și Oy sînt date de relațiile: $F_x = F\cos\alpha$; $F_y = F\sin\alpha$.



a

Fig. 8.4. *a)* Suma componentelor forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ pe axele componentele rezultantei $\vec{R}$, pe aceleași axe. *b)* Sistemul de sistemul de forțe echivalent $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$. Aceste sisteme de forț

În paragraful 1.6 s-a demonstrat că orice sumă tată pe o axă oarecare și se obține o sumă corespun vectorilor. Proiecția rezultantei fiind egală cu su Aplicăm acest rezultat și în cazul forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$. figura 8.4, *a*, suma componentelor forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, egală cu componenta rezultantei $\vec{R}$, pe aceleași axe,

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} = F_1 + F_2 \cos$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} = 0 + F_2 \sin$$

2. Sistemul inițial de forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ este înlocui de forțe $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$, care fac între ele un unghi drept (a acestor două forțe este dată de diagonala dreptu $\vec{R}_x$ și $\vec{R}_y$ drept laturi. Această rezultantă este ident $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, deoarece cele două sisteme de forțe sînt ec

Modulul rezultantei $\vec{R}$ este dat de relația:

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2.$$

Înlocuind în (8.4) valorile lui R_x și R_y date de (8.

$$R^2 = (F_1 + F_2\cos\alpha)^2 + F_2^2 \sin$$

sau, după efectuarea calculelor:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha$$

Unghiul φ, care dă orientarea rezultantei R faţă de axa Ox (fig. 8.4, *b*) este dat de relaţia:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_y}{R_x}. \tag{8.6}$$

Metoda prezintă avantaj, cînd sistemul este alcătuit dintr-un număr mare de forţe.

EXEMPLE

1. Asupra unui punct material acţionează un sistem de forţe alcătuit din cinci forţe concurente, aşa cum se indică în figura 8.5, *a*. Să se determine rezultanta acestui sistem de forţe.

Rezolvare. În cazul acestui exemplu este avantajos să se aleagă axa Ox pe direcţia forţei $\vec{F}_1$ şi axa Oy pe direcţia forţei $\vec{F}_5$ (fig. 8.5, *b*). Se descompune fiecare forţă în două componente după direcţiile axelor Ox şi Oy (fig. 8.5, *b*). În locul celor cinci forţe, orientate după direcţii oarecare, am obţinut şapte forţe colineare pe două axe perpendiculare. Valoarea numerică a rezultantei forţelor pe direcţiile Ox şi Oy este egală cu suma algebrică a valorilor numerice a forţelor componente:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{5x},$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{5y}.$$

Astfel sistemul dat a fost redus la două forţe R_x şi R_y, care au direcţiile perpendiculare. Rezultanta acestor forţe este dată de diagonala dreptunghiului care are ca laturi forţele R_x şi R_y (fig. 8.5, *c*). Mărimea rezultantei este dată de relaţia:

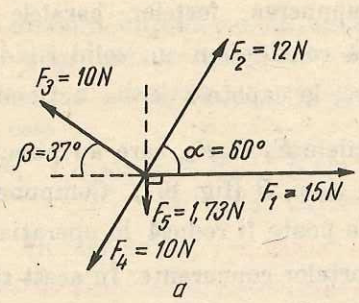
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Pentru efectuarea calculelor este foarte comod să se folosească tabelul următor:

Forţa (N)		Componenta pe axa Ox (N)	Componenta pe axa Oy (N)
F_1	15	$15 \cos 0° = 15$	$15 \sin 0° = 0$
F_2	12	$12 \cos 60° = 6$	$12 \sin 60° = 10{,}39$
F_3	10	$-10 \cos 37 = -8$	$10 \sin 37° = 6$
F_4	10	$-10 \cos 60° = -5$	$-10 \sin 60° = -8{,}66$
F_5	1,73	$1{,}73 \cos 90° = 0$	$-1{,}73 \sin 90° = -1{,}73$
$R_x = \sum_{i=1}^{5} F_{ix} = 8$ N; $R_y = \sum_{i=1}^{5} F_{iy} = 6$ N			

Valoarea numerică a rezultantei este dată de relaţia:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{64 + 36} = 10 \text{ N}.$$



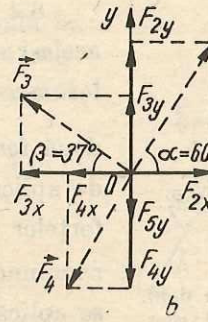


Fig. 8.5. La exemplul 1: *a)* forţele ce acţionează asupra punctului material; *b)* fiecare forţă se descompune în două componente, după direcţiile axelor Ox şi Oy; *c* rezultanta $\vec{R}$ a forţelor este diagonala dreptunghiului

Unghiul de orientare al rezultantei faţă de axa Ox este dat de relaţia:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{6}{8} = 0{,}75; \quad \theta = 37°.$$

2. Să se determine rezultanta a trei forţe coplanare şi concurente care au valorile numerice $F_1 = F_2 = F_3 = 200$ N. Unghiul dintre prima şi a doua forţă este egal cu unghiul dintre a doua şi a treia forţă şi egal cu 60° (fig. 8.6, *a*).

Fig. 8.6. La exemplul 2.

Rezolvare. Compunem mai întîi forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_3$ după regula p
Rezultanta $\vec{R}_{13}$, a forţelor $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_3$, are aceeaşi direcţie, sens
forţa $\vec{F}_2$. Valoarea numerică a rezultantei sistemului de forţe

$$R = R_{13} + F_2 = 400 \text{ N}$$

8.2. COMPUNEREA FORŢELOR PARALELE, CUPLUL DE ROTAŢIE (IREDUCTIBILITATEA LA PUN

Considerăm un solid rigid, adică un sistem mec
dintre elementele care îl alcătuiesc nu se modifică în pro
Solidul rigid, sub acţiunea unui sistem de forţe poat
translaţie, o mişcare de rotaţie sau amîndouă mişcăril
că solidul este acţionat de un sistem de forţe paralele
tanta sistemului de forţe paralele în două cazuri part

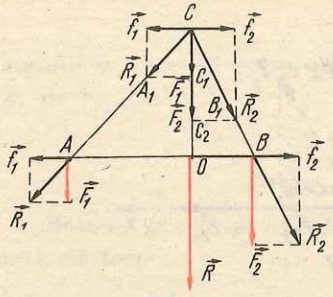


Fig. 8.7. Rezultanta $\vec{R}$, a două forțe paralele de același sens, este paralelă cu acestea, are același sens ca ele și are modulul $R = F_1 + F_2$.

8.2.1. **Compunerea forțelor paralele de același sens.** Să considerăm un solid rigid de forma unei bare, la capetele căreia acționează două forțe paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, care au punctele de aplicație în A și B (fig. 8.7). Compunerea forțelor paralele poate fi redusă la operația de compunere a forțelor concurente. În acest scop se aplică în punctele A și B două forțe egale și de sens opus notate cu $\vec{f}_1$ respectiv $\vec{f}_2$ ($\vec{f}_1 = -\vec{f}_2$), care acționează de-a lungul barei AB. Forțele $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$, fiind egale și de sens contrar, nu au nici o influență asupra stării de mișcare sau de repaus a solidului rigid.

Compunînd forțele $\vec{f}_1$, $\vec{F}_1$ și $\vec{f}_2$, $\vec{F}_2$ după regula paralelogramului, obținem forțele rezultante $\vec{R}_1$ respectiv $\vec{R}_2$. Deplasăm forțele $\vec{R}_1$ și $\vec{R}_2$ pînă în punctul C de intersecție al dreptelor lor suport. În acest punct descompunem forțele $\vec{R}_1$ și $\vec{R}_2$ în componentele lor inițiale.

Efectele forțelor $\vec{f}_1$ și $\vec{f}_2$ anulîndu-se reciproc, le eliminăm din sistem. Rămîn în sistemul de forțe numai $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ care au aceeași dreaptă suport și același sens. Rezultanta lor are deci modulul:

$$R = F_1 + F_2.$$

Forța $\vec{R}$ este rezultanta forțelor paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ aplicate în A și B. Punctul O de aplicație al forței $\vec{R}$, îl determinăm ținînd seamă de asemănarea triunghiurilor AOC și A_1C_1C, și a triunghiurilor BOC și B_1C_2C.

Dacă notăm AO cu b_1 și OB cu b_2, din asemănarea triunghiurilor amintite mai sus, obținem:

$$\frac{b_1}{f_1} = \frac{OC}{F_1} \text{ și } \frac{b_2}{f_2} = \frac{OC}{F_2}.$$

Împărțind relațiile de mai sus membru cu membru, obținem:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{F_2}{F_1} \text{ sau } F_1 b_1 = F_2 b_2. \tag{8.7}$$

Relația (8.7) ne permite să determinăm poziția punctului de aplicație O, al rezultantei $\vec{R}$. Această relație este independentă de schimbarea direcției forțelor paralele în raport cu solidul. Dacă forțele paralele sînt rotite față de direcția inițială cu un anumit unghi β, așa cum indică figura 8.8, momentul rezultant al forțelor în raport cu punctul C, este:

$$F_1 \cdot CA \sin\alpha - F_2 \cdot CB \sin\alpha = 0, \text{ sau}$$
$$F_1 \cdot CA - F_2 \cdot CB = 0.$$

În concluzie, *rezultanta a două forțe paralele și de același sens, aplicate aceluiași solid, este o forță paralelă și de același sens cu componentele și are modulul egal cu suma modulelor componentelor. Punctul de aplicație al rezultantei împarte segmentul de dreaptă care unește punctele de aplicație ale componentelor în două segmente invers proporționale cu modulele forțelor componente.*

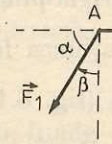


Fig. 8.8. ...cație al r... este inde... direcției ... cu solidul

EXPERIMENTE

Pentru verificarea experimentală a compunerii for... folosi dispozitivul prezentat în figura 8.9.

Se suspendă rigla gradată *1*, de dinamometrul *2* ... călăreți, notați pe figură cu *3*. Dinamometrul indică o f...

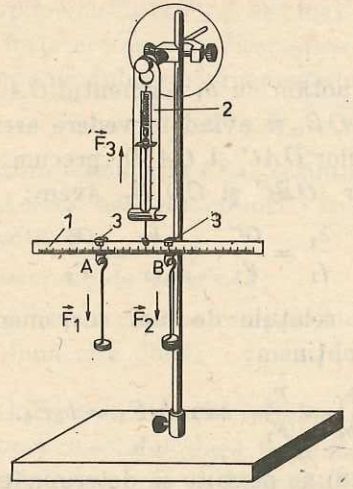


Fig. 8.9. Dispozitiv pentru studiul compunerii forțelor paralele.

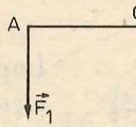


Fig. 8.10. Re... paralele $\vec{F}_1$ ... paralelă cu f... te și de modu... modulelor ...

cu greutatea riglei și a călăreților. Se ține seamă de mărimea acestei forțe în determinările ulterioare.

De călăreți se suspendă cîrlige cu discuri crestate. Discurile suspendate de fiecare călăreț vor acționa asupra riglei cu forțele $\vec{F}_1$ respectiv $\vec{F}_2$. Se deplasează călăreții pe riglă pînă se obține poziția orizontală a acesteia. Rigla este în echilibru sub acțiunea forțelor paralele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$. Forța $\vec{F}_3$ echilibrează forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ (fig. 8.10). Forța $\vec{R} = -\vec{F}_3$, de același suport și de același modul ca forța $\vec{F}_3$ și de sens opus acesteia, care poate echilibra de asemenea forța $\vec{F}_3$, este echivalentă cu sistemul de forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$. Forța $\vec{R}$ este deci rezultanta forțelor paralele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, și experimentul demonstrează că:

a) forța $\vec{R}$ are aceeași direcție și același sens ca și forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, deoarece $\vec{R} = -\vec{F}_3$;

b) $R = F_1 + F_2$.

8.2.2. **Compunerea forțelor paralele de sens opus.** Pentru compunerea forțelor paralele de sens opus vom proceda la fel ca la compunerea forțelor paralele de același sens (fig. 8.11). Conform figurii 8.11, rezultă că:

a) forța rezultantă $\vec{R}$ *are direcția forțelor* $\vec{F}_1$ *și* $\vec{F}_2$ *și sensul forței* $\vec{F}_2$, *adică sensul forței celei mai mari;*

b) modulul forței $\vec{R}$ *este egal cu diferența modulelor forțelor componente:*

$$R = F_2 - F_1.$$

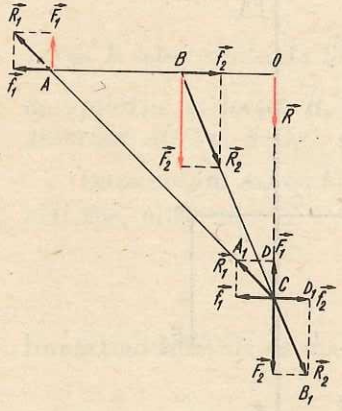


Fig. 8.11. Rezultanta $\vec{R}$, a două forțe paralele de sens contrar, este o forță paralelă cu acestea și are sensul forței celei mai mari. Modulul rezultantei este

$$R = F_2 - F_1.$$

Dacă notăm cu b_1 segmentul OA și cu b_2 segmentul OB, și avînd în vedere asemănarea triunghiurilor OAC și CA_1D, precum și a triunghiurilor OBC și CD_1B_1, avem:

$$\frac{b_1}{f_1} = \frac{OC}{F_1}, \text{ și } \frac{b_2}{f_2} = \frac{OC}{F_2}.$$

Împărțind relațiile de mai sus, membru cu membru, obținem:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ sau } b_1F_1 = b_2F_2. \qquad (8.8)$$

Relația (8.8) ne permite să determinăm poziția punctului de aplicație al rezultantei. Pe figura 8.11 se observă că el este în afara segmentului AB ce unește punctele de aplicație ale componentelor, și situat de partea forței celei mai mari.

Pentru verificarea experimentală a compunerii forțelor paralele de sens opus vom folosi dispozitivul prezentat în figura 8.9. Rigla folosită în acest dispozitiv este în echilibru sub acțiunea forțelor paralele $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ și $\vec{F}_3$.

Forțele paralele $\vec{F}_1$, F_2 și $\vec{F}_3$ (fig. 8.12) fiind în echilibru, putem spune că forța $\vec{F}_2$ echilibrează forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$ și că forța $\vec{R} = -\vec{F}_2$ este rezultanta forțelor $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_3$:

$$\vec{R} = -\vec{F}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_3.$$

Modulul rezultantei este dat de relația:

$$R = F_3 - F_1.$$

8.2.3. **Compunerea unui număr oarecare de forțe p**

de forțe paralele de același sens $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ..., $\vec{F}_n$, care ac solid (fig. 8.13). Se compun forțele două cîte două. S forțele $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$. Apoi rezultanta $\vec{R}_1$ se compune cu forț $\vec{R}_2$ se compune cu forța $\vec{F}_4$ și așa mai departe. Rezultan mului de forțe are aceeași direcție ca și componentele egal cu suma modulelor componentelor:

$$R = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.$$

Punctul de aplicație C al rezultantei generale se n *paralele.* Acesta este un punct fix al solidului, independentă de:

a) sistemul de referință;

b) ordinea în care se compun forțele paralele, două cîte două;

c) schimbarea direcției forțelor paralele în raport cu solidul (dacă toate forțele paralele se rotesc cu același unghi în raport cu solidul);

d) modificarea modulelor forțelor paralele în același raport (spre exemplu dacă toate modulele se micșorează sau se măresc de n ori în raport cu valoarea lor inițială).

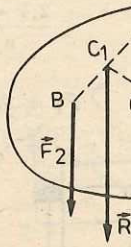


Fig. 8.13. Re forțe paralel punct numit

Dacă forțele paralele nu au toate același sens, se compun mai întîi forțele de un anumit sens și apoi forțele de sens contrar. Se obțin două rezultante parțiale, paralele și de sens opus. Prin compunerea rezultantelor parțiale se obține rezultanta generală, cu punctul de aplicație în centrul forțelor paralele.

Se poate întîmpla ca rezultantele parțiale de sensuri opuse să aibă modulele egale și suporturile diferite, atunci ele alcătuiesc un *cuplu de forțe*.

8.2.4. **Descompunerea unei forțe în două componente paralele cu ea.** Cu ajutorul relațiilor (8.7) și (8.8) se pot rezolva problemele de descompunere a unei forțe date în două forțe paralele cu forța dată și orientate în același sens sau în sens opus.

EXEMPLE

1. Extremitățile unei bare de masă neglijabilă și de lungime $l=2{,}4$ m sînt așezate pe doi stîlpi. La distanța $b_1 = 1{,}6$ m de unul dintre stîlpi, se suspendă un corp cu greutatea $G = 640$ N. Să se calculeze forțele de apăsare pe fiecare dintre stîlpi.

Rezolvare. Fie $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$ forțele care se exercită pe stîlpii care susțin bara (fig. 8.14). Conform relației (8.7), avem:

$$\frac{b_1}{l-b_1} = \frac{F_2}{F_1}, \text{ sau } \frac{b_1}{l-b_1+b_1} = \frac{F_2}{F_1+F_2},$$

cum $F_1 + F_2 = G$ obținem:

$$F_2 = 427 \text{ N}; \; F_1 = 213 \text{ N}.$$

2. Extremitatea unei bare de greutate neglijabilă și de lungime $l = 2{,}4$ m este fixată într-un perete. La distanța $d = 1{,}6$ m de perete, bara este susținută de un stîlp (fig. 8.15). La extremitatea liberă a barei acționează o forță $F = 640$ N. Să se calculeze forțele cu care bara apasă asupra peretelui și asupra stîlpului.

Rezolvare. Forța $\vec{F}$, așa cum rezultă din enunț, este descompusă în două componente paralele și de sens opus. Mărimile acestor componente le calculăm folosind relația (8.8):

$$\frac{l}{l-d} = \frac{F_2}{F_1} \text{ sau } \frac{2{,}4}{0{,}8} = \frac{F_2}{F_1}.$$

Din această ultimă relație obținem:

$$\frac{2{,}4-0{,}8}{0{,}8} = \frac{F_2-F_1}{F_1},$$

de unde

$$F_1 = 320 \text{ N}; \; F_2 = 960 \text{ N}.$$

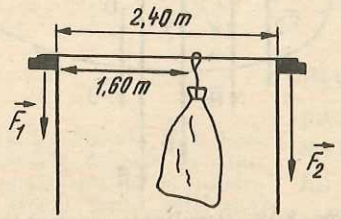


Fig. 8.14. La exemplul 1

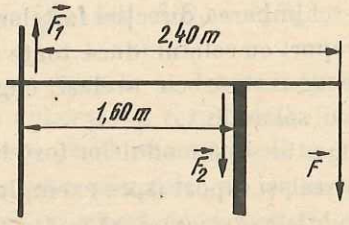


Fig. 8.15. La exemplul 2.

8.2.5. **Cuplul de forțe.** Cuplul de forțe este un sistem de două forțe paralele, de sensuri contrare, de același modul și de suporturi diferite, aplicate aceluiași solid. Planul definit de cele două forțe se numește planul cuplului, iar distanța dintre suporturile lor se numește *brațul cuplului* (fig. 8.16). Cu toate că rezultanta cuplului $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$ (ceea ce face să nu existe mișcare de translație), totuși cuplul are o acțiune bine determinată asupra corpului căruia i se aplică, rotindu-l în jurul unei axe perpendiculare pe planul cuplului.

Fig.

Exemple de cupluri de forțe: acțiunea mîinilor automobil sau asupra ghidonului unei biciclete, acțiunea asupra crestăturii unui șurub, acțiunea mîinii asupra un

8.2.6. **Momentul unui cuplu.** Momentul unui cuplu în raport cu orice punct din spațiu, fiind o proprietate (fig. 8.18).

Să considerăm un punct oarecare O din spațiu. raport cu acest punct este:

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

deoarece $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 = \vec{F}$.

Dar $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}_0$ deci

$$\vec{M} = \vec{r}_0 \times \vec{F}.$$

Momentul cuplului este perpendicular pe planul d și are modulul

$$M = Fr_0 \sin\alpha = Fb,$$

unde $b = r_0 \sin\alpha$ este brațul cuplului.

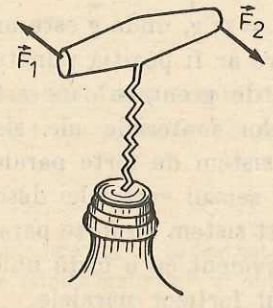


Fig. 8.17. Cuplul de forțe are ca efect producerea unei mișcări de rotație.

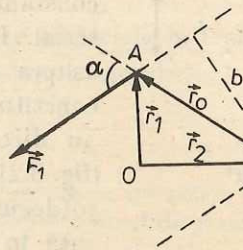


Fig. 8.18. Moment

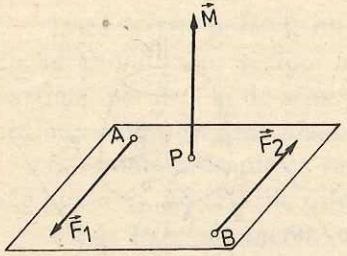


Fig. 8.19. Punctul de aplicaţie al momentului unui cuplu poate fi orice punct din spaţiu.

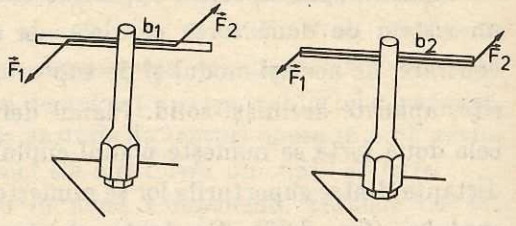


Fig. 8.20. Două cupluri sînt echivalente cînd produc acelaşi efect.

Sensul momentului cuplului coincide cu sensul de înaintare al unui şurub drept, a cărui axă coincide cu suportul momentului, pe care îl rotim în sensul în care cuplul tinde să rotească corpul.

Punctul de aplicaţie al momentului cuplului poate fi orice punct din spaţiu (fig. 8.19) (în cazul corpurilor rigide).

Două sau mai multe cupluri se spune că sînt echivalente, dacă aplicate succesiv aceluiaşi corp, produc acelaşi efect (fig. 8.20). Cuplurile echivalente se pot înlocui unul cu altul. Toate cuplurile echivalente au acelaşi moment, deoarece efectul de rotaţie este caracterizat numai de către momentul cuplului. **În cazul corpurilor rigide un cuplu poate fi rotit, deplasat în propriul său plan sau într-un plan paralel, efectul său rămînînd acelaşi, deoarece momentul său nu se modifică.**

8.3. CENTRUL DE GREUTATE

8.3.1. **Centrul de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale.** Considerăm un sistem alcătuit din n puncte materiale A_1, A_2, ..., A_n, de mase respective m_1, m_2, ... m_n, care au poziţiile fixe unele faţă de altele deoarece sistemul este nedeformabil. Sistemul de puncte materiale este plasat în cîmpul gravitaţional uniform. Fiecare punct al sistemului este supus acţiunii unei forţe de greutate $\vec{G}_i = m_i\vec{g}$, unde $\vec{g}$ este un vector constant oricare ar fi poziţia punctului material. Forţele de greutate care acţionează asupra punctelor materiale ale sistemului constituie un sistem de forţe paralele, care au direcţia şi sensul verticalei descendente (fig. 8.21). Acest sistem de forţe paralele este totdeauna echivalent cu o forţă unică, aplicată în centrul forţelor paralele.

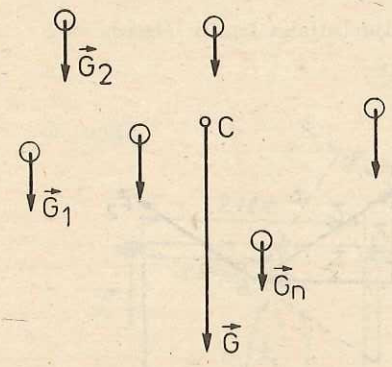


Fig. 8.21. Centrul de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale.

Centrul forţelor de greutate paralele se numeşte *centrul de greutate* al sistemului, iar forţa unică $\vec{G}$, echivalentă cu forţele sistemului, se numeşte *greutatea sistemului de puncte materiale.*

Modulul forţei $\vec{G}$ este dat de relaţia:

$$G = m_1g + m_2g + \ldots + m_ng = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)g,$$

sau

$$G = Mg, \qquad (8.11)$$

unde $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$, reprezintă masa sistemului de puncte materiale. Centrul de greutate se comportă ca un punct material de mas maselor m_i ale tuturor punctelor materiale ale sistemulu

Vom determina poziţia centrului de greutate al unu materiale în raport cu un sistem de coordonate.

Considerăm deci un sistem alcătuit din două punct m_1 şi m_2 şi de coordonate x_1, y_1 şi x_2, y_2, raportate la u pendiculare xOy (fig. 8.22).

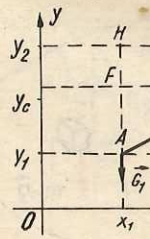


Fig. 8.22. În r referinţă fix, unui sistem de are coord

Forţele paralele $\vec{G}_1 = m_1\vec{g}$ şi $\vec{G}_2 = m_2\vec{g}$ au drept re punctul de aplicaţie în C, numit centru de greutate. Confor

$$G_1b_1 = G_2b_2, \quad \text{sau} \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{G_2}{G_1}.$$

Din asemănarea triunghiurilor AEB şi ADC, precu AHB şi AFC (fig. 8.22), obţinem:

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{b_1}{b_2} \text{ şi } \frac{y_c - y_1}{y_2 - y_c} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Comparînd relaţiile (8.12) şi (8.13), obţinem:

$$\frac{x_c - x_1}{x_2 - x_c} = \frac{G_2}{G_1} \text{ şi } \frac{y_c - y_1}{y_2 - y_c} = \frac{G_2}{G_1}.$$

Aceste relaţii ne permit să determinăm coordonatele ce

$$x_c = \frac{G_1x_1 + G_2x_2}{G_1 + G_2}; \quad y_c = \frac{G_1y_1 + G_2y_2}{G_1 + G_2}$$

Dacă raportăm sistemul de puncte materiale la tre obţinem a treia coordonată a centrului de greutate:

$$z_c = \frac{G_1z_1 + G_2z_2}{G_1 + G_2}.$$

Relaţiile (8.14) şi (8.15) se pot generaliza pentru un sistem oarecare de puncte materiale şi obţinem pentru centrul de greu coordonatele:

$$x_c = \frac{G_1x_1 + \ldots + G_nx_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}, \quad y_c = \frac{G_1y_1 + \ldots + G_ny_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n}, \quad z_c = \frac{G_1z_1}{G_1 +}$$

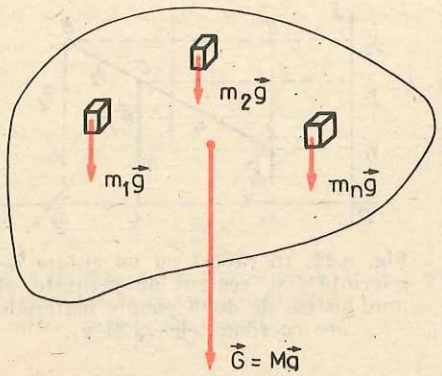


Fig. 8.23. Poziția centrului de greutate al unui solid este independentă de orientarea solidului în raport cu un sistem de referință fix.

Centrul de greutate are următoarele proprietăți:

a) poziția centrului de greutate al unui sistem de puncte materiale față de punctele sistemului este independentă de poziția sistemului față de sistemul de referință;

b) dacă sistemul de puncte materiale are un centru de simetrie, acest punct coincide întotdeauna cu centrul de greutate al sistemului;

c) dacă sistemul de puncte materiale are o axă de simetrie, centrul de greutate al sistemului este situat pe această axă;

d) dacă sistemul de puncte materiale are un plan de simetrie, centrul de greutate este situat în acest plan.

8.3.2. **Centrul de greutate al unui solid rigid.** Orice corp solid poate fi descompus mintal într-un număr foarte mare de elemente de volum, foarte mici, care pot fi aproximate prin puncte materiale. Fiecare punct material de masă m_i este supus unei forțe de greutate $m_i\vec{g}$ (fig. 8.23). Totalitatea forțelor de greutate care se exercită asupra elementelor de volum de masă m_i, constituie un sistem de forțe paralele. Rezultanta $\vec{G}$ a sistemului de forțe paralele este greutatea corpului și are punctul de aplicație în centrul forțelor paralele, care este centrul de greutate al corpului.

Centrul de greutate este un punct fix al corpului ale cărui proprietăți sînt identice cu acelea ale centrului de greutate al unui sistem rigid de puncte materiale. În plus trebuie să menționăm că poziția centrului de greutate al **unui solid omogen este independentă de masa cuprinsă în același contur. Spre exemplu, centrul de greutate al unei sticle goale are aceeași poziție ca și centrul de greutate al aceleiași sticle umplută complet cu un lichid. Deci toate centrele de greutate ocupă poziții identice în raport cu contururi identice.**

Centrul de greutate al unui corp omogen și cu formă geometrică regulată depinde de elementele geometrice ale corpului, nu și de natura materialului din care este alcătuit. Dacă aceste corpuri au un plan, o axă sau un centru de simetrie, atunci centrul de greutate se găsește în planul, pe axa sau în centrul de simetrie respectiv. Spre exemplu, centrul unei bare omogene se află la mijlocul său; al unui disc circular omogen se află în centrul său; al unei sfere omogene se află în centrul sferei; al unui cilindru se află la jumătatea înălțimii cilindrului etc. Centrul de greutate al unei plăci triunghiulare se află la intersecția medianelor triunghiului.

Experimental centrul de greutate al unui corp se determină în felul următor. Se suspendă corpul într-un punct al său A, de care se leagă un fir cu plumb. Direcția firului se marchează pe corp. Apoi se suspendă corpul într-un alt punct al său B și se marchează, din nou pe corp, direcția firului cu plumb Intersecția celor două linii marcate pe corp arată poziția centrului de greutate C (fig. 8.24). Se poate verifica experimental că centrul de greutate al unui corp este un punct unic.

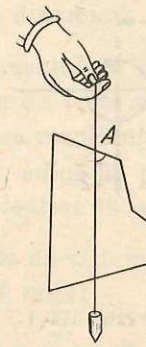


Fig. 8.
experim
de greu

După cum se poate arăta, într-un cîmp gravitațional omogen, centrul de greutate coincide cu centrul de masă. Totuși noțiunea de centru generală decît aceea de centru de greutate, deoarece cent sistem fizic se poate determina întotdeauna, independent ționale, ceea ce nu este adevărat pentru centrul de greut un experimentator din spațiul cosmic, aflat într-un sate determine centrul de greutate al unui obiect deoarece for are nici un efect în locul în care se face experimentul. În s torul va putea determina centrul de masă al obiectului.

EXEMPLE

1. Pe o tijă rigidă de masă neglijabilă sînt introduse două sfere C tive m_1 și m_2. Centrele sferelor se află la distanțele x_1 respectiv a tijei (fig. 8.25). Să se determine poziția centrului de greutat din cele două sfere.

Rezolvare. Greutatea $\vec{G}$ a sistemului alcătuit din cele două sfere tul C, centrul de greutate al sistemului.

Momentul forței rezultante $\vec{G}$, în raport cu punctul O, este ega forțelor componente în raport cu același punct, deci:

$$Gx_C = G_1x_1 + G_2x_2,$$

de unde

$$x_C = \frac{G_1x_1 + G_2x_2}{G_1 + G_2},$$

deoarece $G = G_1 + G_2$.

2. Să se determine poziția centrului de greutate C al unui disc or formă și de diametru $D_1 = 40$ cm, din care s-a tăiat o bucată $D_2 = 10$ cm. Centrul O_2 al orificiului circular se află la 10 cm d dat (fig. 8.26).

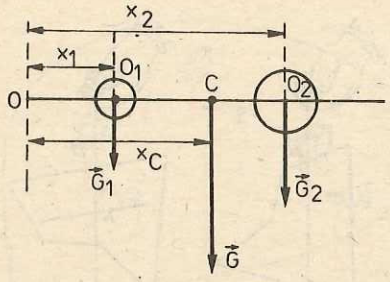


Fig. 8.25. La problema rezolvată 1.

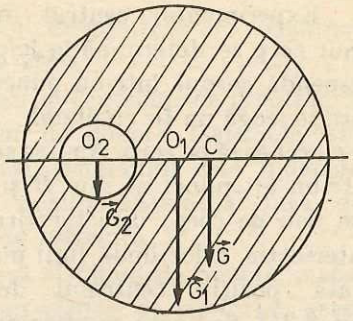


Fig. 8.26. La problema rezolvată 2.

Rezolvare. Calculăm raportul dintre greutatea $G_1 = \pi R_1^2 h\rho g$ a discului întreg și greutatea $G_2 = \pi R_2^2 h\rho g$ a părții scoase din disc:

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{16}{1},$$

unde R_1 este raza discului și R_2 raza părții decupate.
Greutatea discului incomplet se obține din relația de mai sus făcînd o proporție derivată:

$$\frac{G_1 - G_2}{G_2} = \frac{15}{1}$$

deci: $G = G_1 - G_2 = 15\ G_2$.

Presupunînd că discul este întreg, greutatea lui, $\vec{G}_1$, aplicată în O_1, este rezultanta forțelor paralele $\vec{G}_2$ și $\vec{G}$.

Momentul forței rezultante $\vec{G}_1$, în raport cu O_1 este egal cu suma momentelor forțelor componente $\vec{G}_2$ și $\vec{G}$ în raport cu același punct.
Deci

$$G_2 \cdot O_1O_2 - G \cdot O_1C = 0,$$

de unde

$$O_1C = \frac{G_2 \cdot O_1O_2}{G} = \frac{G_2 \cdot O_1O_2}{15\,G_2} = \frac{10}{15} = 0{,}67 \text{ cm}.$$

8.4. ECHILIBRUL MECANIC. CONDIȚII DE ECHILIBRU

8.4.1. **Echilibrul punctului material liber. Echilibrul de translație.** Punctul material, fiind considerat un corp cu dimensiuni neglijabile, acesta nu poate efectua mișcări de rotație în jurul unei axe trecînd prin corp. Sub acțiunea unui sistem de forțe, punctul material poate efectua mișcări de translație. Echilibrul sistemului de forțe aplicate punctului material se numește *echilibru de translație.*

Se spune că un sistem de forțe este în echilibru sau că are efect nul atunci cînd nu influențează mișcarea sau starea de repaus a corpului pe care

Conform principiului fundamental al dinamicii, A
minantă a variației vitezei unui corp este rezultanta $\vec{R}$
nează asupra corpului. Pentru ca un sistem de forțe să
rea corpului pe care îl acționează, trebuie ca rezultanta

Să considerăm un punct material liber, adică un p
este legat de alte corpuri și care se poate deplasa în or

Dacă punctul material liber este acționat de un sistem
în așa fel dispuse încît rezultanta lor să fie nulă:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0,$$

atunci punctul material rămîne în repaus sau se mișc
față de un sistem de referință inerțial. Spunem că pu
echilibru. Echilibrul este *static* cînd punctul materia
echilibrul este *dinamic* cînd se mișcă rectiliniu și unifo
mul de referință dat. Alegînd convenabil sistemul d
dinamic poate fi privit ca echilibru static. În conti
numai la echilibrul static. Relația (8.17) reprezintă
pentru punctul material liber. Deci:

condiția necesară și suficientă pentru echilibrul
aplicate unui punct material liber este ca rezultant

Dacă proiectăm ecuația vectorială (8.17) pe două a
pendiculare Ox și Oy, condiția de echilibru (8.17) este
toarele condiții de echilibru:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0$$
$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0$$

Condiția necesară și suficientă pentru echilibrul sistemu
nează asupra punctului material liber, este ca suma co
două axe perpendiculae Ox și Oy să fie zero.

8.4.2. Echilibrul punctului material liber supus acț

EXPERIMENT

Vom folosi dispozitivul experimental reprezentat
cu componente ale trusei de fizică pentru liceu. Acest d
tizat în mod simplificat în figura 8.28.

Corpul studiat este un inel foarte ușor, asimilat
Greutatea inelului se neglijează în raport cu forțele c
lui. De inel se leagă două fire, care trec peste doi scri
acestor fire se leagă niște cîrlige suport pentru discu

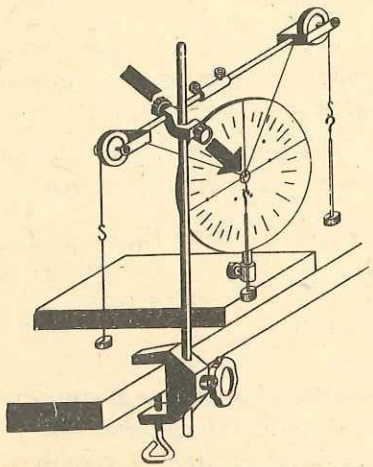


Fig. 8.27. Dispozitiv pentru studiul echilibrului forţelor.

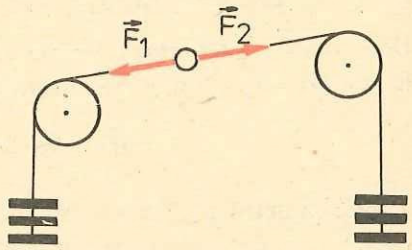


Fig. 8.28. Echilibrul unui punct material supus acţiunii a două forţe.

cîrlige suport se pun în număr egal discuri. Se constată că firele legate de inel se întind în linie dreaptă, iar inelul rămîne în repaus.

Interpretăm acest experiment simplu astfel. Asupra inelului acţionează două forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ care au acelaşi suport, sensurile opuse şi modulele egale. Rezultanta $\vec{R}$ a forţelor este egală cu zero:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Cele două forţe se echilibrează.

Un punct material liber supus acţiunii a două forţe este în echilibru dacă cele două forţe au acelaşi suport, acelaşi modul şi sensurile opuse.

8.4.3. **Echilibrul punctului material liber supus acţiunii a trei forţe.**

EXPERIMENT

Se foloseşte dispozitivul din figura 8.27 care este reprezentat simplificat în figura 8.29. Corpul studiat este inelul din experimentul precedent. De acest inel se leagă trei fire, dintre care două se trec peste cei doi scripeţi ai dispozitivului. De unul dintre firele trecute peste scripeţi se suspendă, spre exemplu, patru discuri crestate, iar de celălalt trei discuri crestate. Lăsat liber inelul nu mai rămîne în echilibru şi, pentru a-l echilibra, se suspendă de al treilea fir un număr de discuri crestate, spre exemplu cinci.

Asupra punctului material acţionează trei forţe concurente: $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ şi $\vec{F}_3$.

Vom înlocui forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ prin rezultanta lor $\vec{R}_1$. Punctul material se află în echilibru sub acţiunea forţelor $\vec{F}_3$ şi $\vec{R}_1$. Deci $\vec{R}_1$ trebuie să aibă acelaşi suport şi acelaşi modul ca $\vec{F}_3$ şi sensul opus acesteia:

$$\vec{R}_1 = -\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2.$$

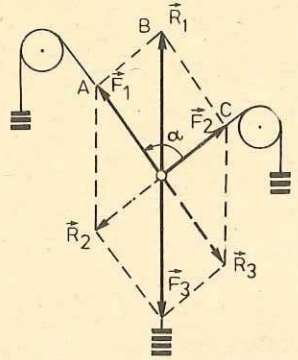


Fig. 8.29. Un punct material este în echilibru sub acţiunea a trei forţe coplanare concurente cînd rezultanta lor este nulă.

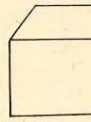


Fig. 8.30. S
curente în
unică $\vec{R}$,

Deci,

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0.$$

Prin urmare

condiţia necesară şi suficientă ca punctul mat
trei forţe să fie în echilibru este ca rezultanta lor

Experimentul descris mai sus permite să se ve
a două forţe $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ concurente într-un punct O es
şi modul prin diagonala care pleacă din O, a pa
laturi cele două forţe (fig. 8.29 şi 8.30).

Pentru verificarea experimentală de care am
unghiul dintre forţele $\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ cu ajutorul unui ra
care este prevăzut dispozitivul, şi apoi reprezent
şi $\vec{R}_1$ pe o foaie de hîrtie milimetrică. Din reprezen
forţa $\vec{R}_1$ este orientată după diagonala paralelogra
$\vec{F}_1$ şi $\vec{F}_2$ ca laturi şi are modulul egal cu lungimea

Acelaşi experiment permite să se verifice că fi
$\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, şi $\vec{F}_3$ este direct opusă rezultantei celorlalt

EXEMPLU

De mijlocul unui fir O este legat un inel uşor, asimila
greutate este neglijabilă în raport cu forţele care ac
firului, care susţin două corpuri cu greutăţile $G_1 = 6$

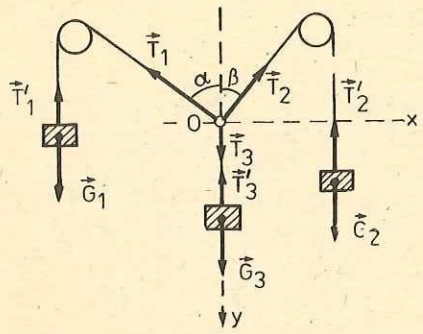


Fig. 8.31. La problema rezolvată.

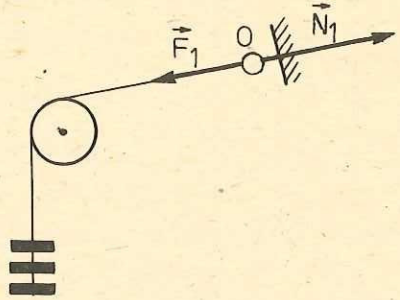


Fig. 8.32. Punctul material este în echilibru sub acțiunea forței $\vec{F}_1$ și a forței de legătură $\vec{N}_1$.

peste doi scripeți mici. De inel se leagă un al doilea fir, care susține un corp de greutate $G_3 = 10$ N (fig. 8.31). Să se determine unghiurile α și β pentru poziția de echilibru a punctului material O.

Rezolvare. Punctul material O este liber. Poziția sa în spațiu fiind determinată numai de forțele care acționează asupra lui. Asupra punctului material acționează forțele $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ și $\vec{T}_3$. Punctul material fiind în echilibru, rezultanta forțelor care acționează asupra lui este zero.

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0. \tag{8.20}$$

Proiectăm ecuația vectorială (8.20) pe două axe de coordonate Ox și Oy. Direcția axei Oy coincide cu direcția forței $\vec{T}_3$, iar axa Ox este perpendiculară pe Oy în O. Efectuînd proiecțiile, și avînd în vedere că $T_1 = G_1$, $T_2 = G_2$ și $T_3 = G_3$, obținem: $-G_1 \sin\alpha + G_2 \sin\beta = 0$; $G_3 - G_1 \cos\alpha - G_2 \cos\beta = 0$, sau

$$G_1 \sin\alpha = G_2 \sin\beta;\ G_3 - G_1 \cos\alpha = G_2 \cos\beta. \tag{8.21}$$

Ridicînd la pătrat relațiile (8.21) și apoi adunîndu-le, obținem:

$$\cos\alpha = \frac{G_3^2 + G_1^2 - G_2^2}{2G_1G_3} = 0{,}6;\ \alpha \approx 53°.$$

În mod asemănător se obține și

$$\cos\beta = \frac{G_3^2 + G_2^2 - G_1^2}{2G_2G_3} = 0{,}8;\ \beta \approx 37°.$$

8.4.4. **Echilibrul punctului material supus la legături.** Suprimăm unul dintre firele legate de inelul folosit în experimentul descris în § 8.4.2. și apoi prindem inelul de un cîrlig (fig. 8.32). Asupra inelului, care este în echilibru acționează forța $\vec{F}_1$. Însă această forță singură nu poate să echilibreze inelul. Trebuie să admitem existența unei a doua forțe $\vec{N}_1$. Această forță care se exercită din partea cîrligului, adică din partea legăturii, este o forță de legătură sau o forță de reacțiune sau simplu reacțiune. Forța de legătură $\vec{N}_1$ are același suport, același modul ca forța $\vec{F}_1$ și sensul opus acesteia. Deci cele două forțe se echilibrează, rezultanta lor fiind egală cu zero.

Se numește legătură, orice cauză care limitează mișcarea unui punct material sau a unui corp oarecare în spațiu. Legăturile obligă punctul material să rămînă tot timpul pe o anumită suprafață sau pe o anumită curbă sau să nu părăsească un anumit loc din spațiu.

Cîteva legături simple ale punctului material le cunoașteți din capitolele precedente. Spre exemplu: legăturile realizate prin fire care dau naștere unor reacțiuni numite tensiuni în fire, sau legăturile realizate prin anumite suprafețe plane sau curbe pe care sînt așezate puncte materiale. Acestea dau naștere unor reacțiuni $\vec{N}$ orientate de-a lungul normalei comune la suprafețele corpurilor în contact (fig. 8.33).

Reacțiunile (forțele de legătură) pot înlocui legătură ca atunci cînd eliberăm un punct material de o l pra acestuia, cîte o forță de legătură. Procedînd a cu un sistem de forțe de legătură.

Condiția necesară și suficientă ca un punct ma să fie în echilibru este ca rezultanta forțelor efec tului material și a forțelor de legătură să fie eg

EXEMPLE

Pe un plan orizontal se află un punct material de greu nează o forță $\vec{F}$, formînd cu orizontala unghiul α (fig. maximă pentru care punctul material rămîne încă în e care dintre punctul material și plan este μ.

Rezolvare. Această problemă se referă la punctul materi cuiesc legăturile geometrice prin forțele de legătură și bru:

$$\vec{G} + \vec{F}_f + \vec{F} + \vec{N} = 0,$$

unde $\vec{G}$ este greutatea punctului material, $\vec{F}_f$ forța de frecare, $\vec{F}$ forța de tracțiune, $\vec{N}$ reacțiunea normală a planului.

Proiectînd ecuația (8.22) pe două axe de coordonate perpendiculare Ox și Oy, care au direcțiile orizontală și verticală și sensul indicat pe figură, obținem:

$$F\cos\alpha - \mu N = 0, \tag{8.23}$$

$$N + F\sin\alpha - G = 0, \tag{8.24}$$

unde μN este modulul forței de frecare la limita lunecării. Din relația (8.24) scoatem valoarea lui N, o introducem în (8.23) și după efectuarea calculelor obținem:

$$F\cos\alpha + \mu F\sin\alpha - \mu G = 0.$$

Fig.

Din relaţia de mai sus obţinem forţa maximă pentru care punctul material rămîne încă în echilibru:

$$F_{max} = \frac{\mu G}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}$$

Pentru forţe mai mici decît F_{max} corpul va fi în echilibru.

8.4.5. **Echilibrul de translaţie şi de rotaţie al unui solid rigid.** Un solid rigid, sub acţiunea unui sistem de forţe, poate efectua o mişcare de translaţie sau o mişcare de rotaţie. Deci, în acest caz sînt necesare două condiţii de echilibru pe care le vom studia în cele ce urmează.

a. Un corp solid este în echilibru de translaţie, în raport cu un sistem de referinţă inerţial, dacă este în repaus (echilibru static) sau cînd se află în mişcare rectilinie şi uniformă (echilibru dinamic). Putem transforma orice caz de echilibru dinamic în echilibru static, plasînd solidul într-un sistem de referinţă convenabil ales.

Condiţiile de echilibru de translaţie pentru solidul rigid sînt aceleaşi ca şi pentru punctul material.

Solidul rigid este în echilibru de translaţie cînd rezultanta sistemului de forţe care acţionează asupra lui este zero.

Condiţie exprimată prin relaţia următoare:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = 0. \tag{8.25}$$

Relaţia (8.25) exprimă prima condiţie de echilibru.

Proiectînd ecuaţia vectorială (8.25) pe două axe perpendiculare Ox şi Oy, obţinem:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0, \tag{8.26}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0. \tag{8.27}$$

Deci, *pentru ca un sistem de forţe aplicate unui solid rigid să fie în echilibru de translaţie (într-un plan), este necesar şi suficient ca suma componentelor forţelor pe două axe perpendiculare Ox şi Oy să fie nule.*

b. Efectul de rotaţie produs de o forţă asupra unui solid este măsurat prin momentul forţei în raport cu un punct sau cu o axă.

Solidul rigid este în echilibru de rotaţie cînd se află în repaus sau cînd se roteşte uniform în jurul unei axe. Pentru a fi îndeplinite aceste condiţii este necesar şi suficient ca momentul rezultant al forţelor aplicate solidului să fie nul.

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \ldots + \vec{M}_n = 0. \tag{8.28}$$

Relaţia (8.28) exprimă a doua condiţie de echilibru, numită şi condiţia de echilibru de rotaţie.

Observaţii. 1. Echilibrul de translaţie este independent de poziţia punctelor de aplicaţie ale forţelor care îl acţionează. Dacă solidul reprezentat în figura 8.35, *a*, este în echilibru sub acţiunea forţelor cu punctele de aplicaţie în A, B, C, el va rămîne mai departe în echilibru şi cînd punctele de aplicaţie ale forţelor sînt în A_1, B_1, C_1 (fig. 8.35, *b*). Poziţia punctului de aplicaţie al forţelor influenţează numai echilibrul de rotaţie.

2. Condiţiile de echilibru depind de natura sistemului de forţe care acţionează asupra solidului rigid. Distingem următoarele cazuri particulare:

1) Dacă solidul rigid este supus acţiunii a două forţe, el este în echilibru cînd cele două forţe au acelaşi modul, acelaşi suport şi sensurile opuse.

2) Dacă solidul este supus acţiunii a trei forţe, aplicate în trei puncte necoliniare, el este în echilibru cînd:

a) suporturile forţelor sînt cuprinse în planul determinat de punctele lor de aplicaţie;

b) suporturile forţelor sînt concurente;

c) rezultanta a două dintre cele trei forţe are a modul ca forţa a treia, sensul ei fiind opus sens forţe.

3) Dacă solidul este supus acţiunii unui sistem d laşi plan, el este în echilibru cînd rezultanta sistemulu zero:

$$\vec{R} = \sum_i^n \vec{F}_i = 0.$$

Observaţie. Dacă rezultanta forţelor este zero (condiţia de echilibru la translaţie) atunci momentul raport cu orice punct din spaţiu nu depinde de acest de anulare a momentului se poate pune faţă de oric

EXEMPLE

1. Echilibrul unui solid sub acţiunea unui sistem de forţe paral

O bară AB, de greutate neglijabilă şi de lungime l, este aşe punct O aflat la distanţa $b_1 = \frac{2}{3} l$ de punctul A (fig. 8.36, să se afle forţele, care trebuie aplicate la extremităţile barei, în echilibru?

Rezolvare. Aplicăm condiţia de echilibru (8.28) sistemului asupra barei (fig. 8.36, *b*):

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \vec{M}_O(\vec{F}_1) + \vec{M}_O(\vec{F}_2) + \vec{M}_O(\vec{F}_3)$$

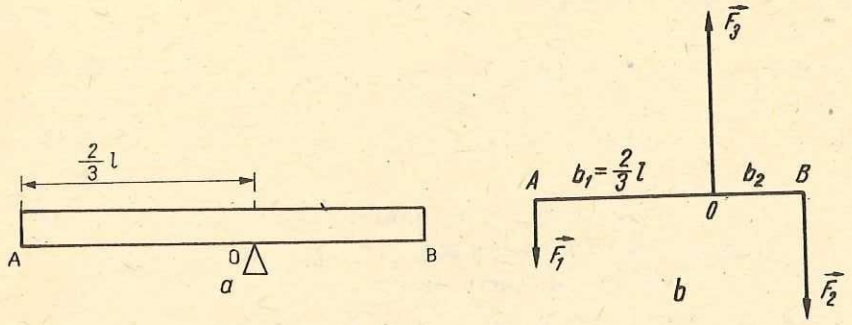


Fig. 8.36. La exemplul 1.

Momentele forţelor le calculăm în raport cu punctul O:

$$M_0(\vec{F}_1) = -b_1F_1 = -\frac{2}{3}l\ F_1;\ M_0(\vec{F}_2) = b_2F_2 = \frac{1}{3}lF_2.$$

Momentul forţei $\vec{F}_3$ în raport cu O este zero.
Înlocuind valorile momentelor în relaţia (8.29), obţinem:

$$b_2F_2 - b_1F_1 = 0,\ \text{sau}\ \frac{1}{3}lF_2 - \frac{2}{3}lF_1 = 0,$$

de unde:

$$F_2 = 2F_1. \tag{8.30}$$

Bara este în echilibru pentru toate forţele care satisfac relaţia (8.30).
Cum bara este şi în echilibru de translaţie, rezultanta forţelor care acţionează asupra barei este zero, deci:

$$F_3 - F_2 - F_1 = 0,\ \text{sau}\ F_3 = F_1 + F_2. \tag{8.31}$$

Cînd solidul este în echilibru de translaţie, condiţia $\Sigma\vec{M}(\vec{F}_i) = 0$ rămîne valabilă, oricare ar fi punctul sau axa în raport cu care se calculează momentele. Putem verifica acest lucru în cazul exemplului dat mai sus. Calculăm momentele în raport cu punctul A:

$$F_1 \cdot 0 - F_3 \cdot \frac{2}{3}l + F_2 \cdot l = 0.$$

Avînd în vedere relaţia (8.31), obţinem:

$$F_2 = 2F_1.$$

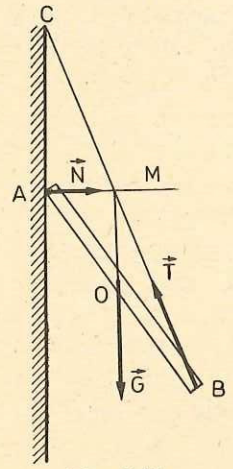


Fig. 8.37.
La exemplul 2.

Calculaţi momentele forţelor în raport cu un punct C aflat la distanţa $\frac{1}{4}l$ de A.

2. Echilibrul unui solid sub acţiunea unui sistem de forţe neparalele.

O bară omogenă de masă m şi lungime l se reazemă cu capătul ei superior A de un perete neted. De capătul barei B este prins un fir inextensibil BC, fixat de perete în punctul C. Lungimea firului este $l\sqrt{3}$. Să se determine poziţia de echilibru a barei pentru care reacţiunea $\vec{N}$ este perpendiculară pe perete în A (fig. 8.37).

Rezolvare. Înlocuim legăturile la care este supusă bara
$\vec{T}$. Asupra barei acţionează sistemul de forţe $\vec{N}$, $\vec{T}$ şi $\vec{G}$.
turile celor trei forţe se intersectează într-un punct M

Reacţiunea $\vec{N}$ este perpendiculară în A, numai pentru u
ale barei, caracterizată prin distanţa $d = AC$, pe care
triunghiul CAB, dreapta OM este paralelă cu latura A
şi CB la jumătate. Deci $MC = (\sqrt{3}/2)l$.
Din triunghiurile dreptunghice CAM şi AMO, obţinem:

$$AM^2 = CM^2 - AC^2 = \frac{3}{4}l^2 -$$

şi

$$AM^2 = AO^2 - OM^2 = \frac{l^2}{4} - \frac{d}{4}$$

Din relaţiile de mai sus obţinem:

$$\frac{3}{4}l^2 - d^2 = \frac{l^2}{4} - \frac{d^2}{4},$$

sau

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}}l.$$

Poziţia de echilibru a sistemului dat este independentă

8.5. ECHILIBRUL ÎN CÎMP GRAVITAŢI ŞI ENERGIA POTENŢI

8.5.1. **Echilibrul punctului material.** Vom stu
material în cîmpul gravitaţional uniform, unde
forţelor de greutate şi acţiunii forţelor de legătură

Spunem că un punct material este în echilibru
raport cu un sistem de referinţă inerţial. Condiţia
rial să fie în echilibru, în raport cu un sistem de
suma vectorială a tuturor forţelor care acţionea
Aceasta este condiţia necesară ca punctul materi
este ea şi suficientă pentru ca echilibrul să fie stab

Să considerăm o suprafaţă al cărei profil este
Vom aşeza în diferite puncte ale acestei suprafeţe o
asimilabilă cu un punct material. Constatăm că
punctele A şi B de pe porţiunea curbă a suprafeţei,
de pe porţiunea plană orizontală MP a suprafeţe
puncte rezultanta forţelor care acţionează asupr
egală cu zero:

$$\vec{R} = \vec{G} + \vec{N} = 0,$$

unde $\vec{G}$ este greutatea punctului material şi $\vec{N}$ reacţ

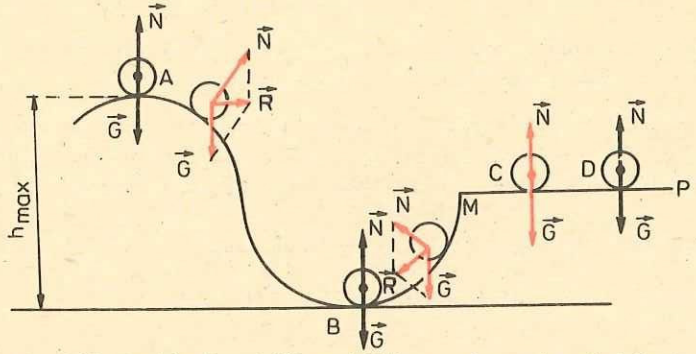


Fig. 8.38. Poziția de echilibru stabil a unui punct material sub acțiunea forțelor de greutate corespunde minimului de energie potențială.

Dacă îndepărtăm foarte puțin bila din poziția de echilibru static, pot interveni trei situații:

a) îndepărtînd-o din punctul A, asupra bilei acționează o forță rezultantă care o îndepărtează și mai mult de poziția inițială. Se spune că echilibrul este *instabil*;

b) îndepărtînd-o din punctul B, bila este acționată de o forță rezultantă care o readuce la poziția inițială — se spune că echilibrul este *stabil*;

c) îndepărtată din punctul C, bila rămîne în echilibru în orice punct al suprafeței plane orizontale — se spune că echilibrul este *indiferent*.

Prin urmare, forța rezultantă egală cu zero este o condiție necesară, dar nu suficientă pentru echilibrul stabil al punctului material într-un cîmp de forțe conservativ.

Echilibrul punctului material (al bilei) poate fi considerat și din punctul de vedere al energiei potențiale a sistemului alcătuit din punctul material și Pămînt. Energia potențială a acestui sistem se exprimă prin relația $E_p = mgh$, unde h reprezintă diferența de nivel dintre poziția punctului material și nivelul corespunzător energiei potențiale nule. În cazul descris mai sus și reprezentat în figura 8.38, vom lua planul orizontal care trece prin punctul B, ca nivel de referință pentru energia potențială, a cărei valoare la acest nivel o considerăm nulă, $E_{pB} = E_{po} = 0$. Punctul A corespunde maximului de energie potențială, iar punctul B corespunde minimului de energie potențială. Pe planul orizontal care trece prin punctele C și D energia potențială este constantă.

Deci, poziția de echilibru stabil a unui punct material sub acțiunea forțelor de greutate este aceea care corespunde minimului de energie potențială, în comparație cu valorile din pozițiile vecine. Această proprietate este valabilă pentru orice punct material supus acțiunii unor forțe conservative.

În poziția de echilibru instabil, energia potențială are o valoare maximă în comparație cu valorile din punctele vecine. Iar în cazul cînd energia potențială a punctului material este constantă, punctu
libru indiferent.

8.5.2. **Echilibrul solidului rigid suspendat.** Cor
echilibrului punctului material în cîmpul gravitați
ușor la echilibrul solidului rigid. Părțile componen
nate de forțele gravitaționale a căror rezultantă e
greutate al corpului. Putem să înlocuim solidul
plasat în centrul său de greutate în care presupu
masă a corpului.

Cunoașterea poziției centrului de greutate al
importanță pentru diferitele aspecte ale echilibrulu

Suspendăm o riglă omogenă cu una dintre ex
(fig. 8.39, *a*). Constatăm că centrul său de greuta
suspensie și pe aceeași verticală cu acesta. Forțe
riglei, greutatea $\vec{G}$ și reacțiunea $\vec{N}$ a suportului se
tează rigla din această poziție. Centrul său de greu
tențială crește. Lăsată liber, rigla este readusă în
cuplul alcătuit din forțele $\vec{G}$ și $\vec{N}$. În acest caz, rigla
Poziției de echilibru stabil îi corespunde energia p

Se rotește rigla cu 180°, așa cum indică figura
tate a urcat deasupra punctului de sprijin, iar ener
a crescut la valoarea maximă. În acest caz avem
instabil. Îndepărtînd foarte puțin rigla din această
unea cuplului de forțe $\vec{G}$ și $\vec{N}$, tinde să ocupe poziți
potențiale minime; deci, poziția de echilibru stab

Dacă se suspendă rigla în centrul său de greut
care o așezăm, ea rămîne în echilibru. În acest caz
ferent.

În concluzie, modificînd foarte puțin poziția
solid suspendat, se pot ivi trei cazuri:

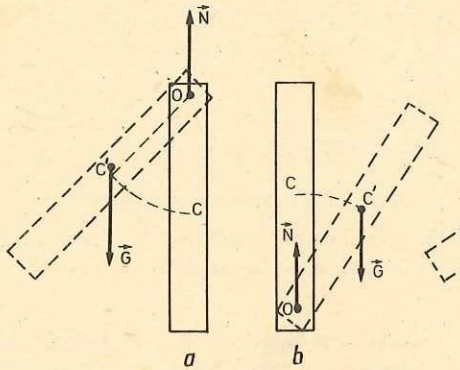


Fig. 8.39. Solidul (rigla) este în echilibru: st
instabil în poziția *b*; indiferent în

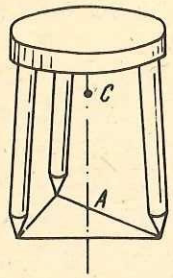


Fig. 8.40. Baza de sprijin a trepiedului este un triunghi.

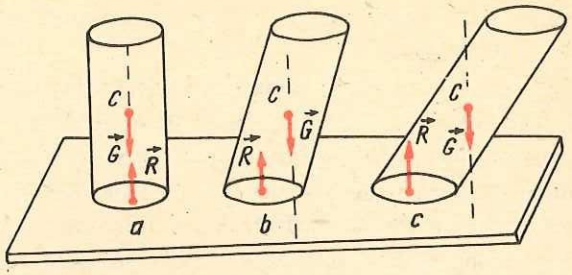


Fig. 8.41. Un corp aşezat pe o suprafaţă plană este în echilibru cînd verticala coborîtă din centrul său de greutate cade în interiorul suprafeţei de susţinere.

a) solidul revine la poziţia iniţială — se spune că echilibrul este stabil;

b) solidul se îndepărtează şi mai mult de poziţia de echilibru — se spune că echilibrul este instabil;

c) solidul rămîne în repaus în orice poziţie — se spune că echilibrul esté indiferent.

8.5.3. **Echilibrul solidului care are o bază de sprijin.** Clădirile, vehiculele, obiectele din gospodării aşezate pe suprafeţe plane sînt în stare de echilibru, deoarece ele au o bază de susţinere. Un scaun sau o masă se sprijină pe podea în patru puncte, un taburet în trei puncte. Unind punctele corpului aflate în contact cu suprafaţa plană şi anume pe cele mai îndepărtate, obţinem un poligon convex, a cărui suprafaţă se numeşte *bază de susţinere.* Figura 8.40 arată că baza de susţinere a unui taburet este un triunghi.

Un corp solid aşezat pe o suprafaţă plană se află în echilibru, atunci cînd verticala coborîtă din centrul său de greutate cade în interiorul bazei de susţinere. De exemplu cilindrul din figura 8.41, *a* este în echilibru deoarece greutatea şi reacţiunea se echilibrează reciproc. Cilindrul din figura 8.41, *c*, pentru care verticala coborîtă din centrul de greutate nu cade în interiorul bazei de sprijin, nu este în echilibru, deoarece greutatea şi reacţiunea formează un cuplu care tinde să-l răstoarne. Cilindrul din figura 8.41, *b* este la limita echilibrului.

ÎNTREBĂRI. EXERCIŢII. PROBLEME

1. In ce caz, două sau mai multe sisteme de forţe, sînt echivalente?

2. Se descompune o forţă pe două direcţii oarecare coplanare cu forţa. Este posibil ca una dintre componentele forţei să fie mai mare decît forţa?

R: da.

3. Dacă rezultanta unui sistem de forţe concurente este zero, demonstraţi că şi momentul rezultant al acestor forţe în raport cu un punct oarecare este zero.

4. Demonstraţi că un cuplu nu poate fi echilibrat decît de un alt cuplu.

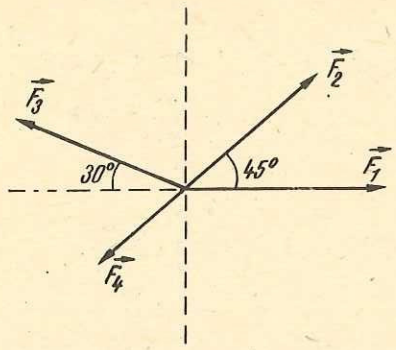
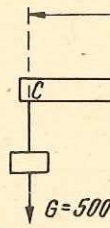


Fig. 8.42. La problema 8.



Fig

5. Să se determine rezultanta a trei forţe coplanare şi c
$F_1 = F_2 = F_3 = 40$ N şi care fac între ele unghiuri de 120

6. De cablul unui funicular atîrnă un corp cu masa m = 1
două părţi întinse unghiul $\alpha = 120°$. Ce forţă de întindere

7. **Se dau 6 forţe concurente egale în modul care fac între el
rezultanta sistemului de forţe.**

8. Să se calculeze prin metoda analitică, rezultanta sistem
figura 8.42. Se dau $F_1 = F_2 = F_3 = 40$ N, $F_4 = 20$ N.

9. O bară cu greutatea neglijabilă se sprijină în A şi B p
La extremitatea C a barei se suspendă o sarcină $G = 50$
unile suporturilor asupra barei, în punctele de sprijin.

R: N_A

10. O grindă de greutate neglijabilă se sprijină în M şi N p
De grindă sînt suspendate trei sarcini $F_1 = 200$ N; F_2
punctele A, B şi C. Să se determine:

a) modulul şi poziţia punctului de aplicaţie al rezultantei

b) modulul şi poziţia punctului de aplicaţie al rezultantei

R: *a)* $R_1 = 500$ N; la 18 cm de A; *b)* R

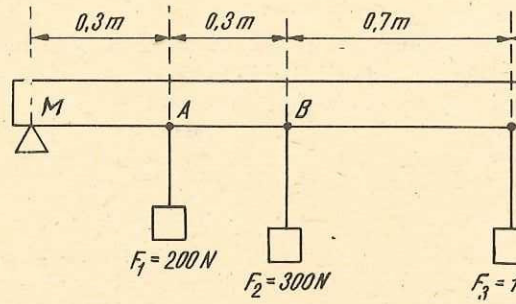


Fig. 8.44. La problema 10.

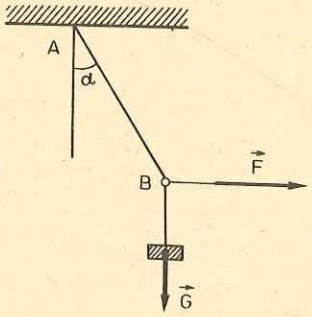


Fig. 8.45. La problema 12.

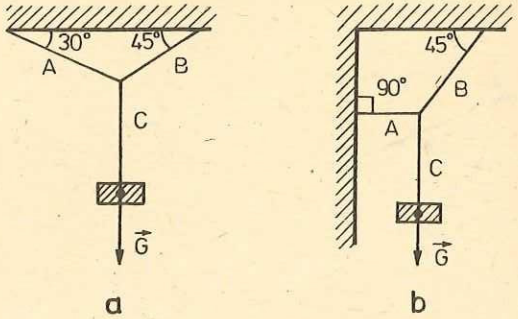


Fig. 8.46. La problema 13.

11. O șină de cale ferată cu lungimea $l = 10$ m și cu masa $m = 900$ kg este ridicată cu două frînghii paralele. Să se determine tensiunile din frînghii, dacă una dintre ele este fixată la un capăt al șinei iar cealaltă la distanța $d = 1$ m de celălalt capăt.

R: 4 000 N; 5 000 N.

12. De un fir fixat într-un punct A, se suspendă un corp cu masa $m = 2$ kg. Un al doilea fir este legat de primul în B (fig. 8.45). Asupra firului al doilea se exercită o forță orizontală $\vec{F}$. Care trebuie să fie mărimea forței $\vec{F}$, pentru ca unghiul α dintre AB și verticală să fie egal cu 45° ($g = 10$ m/s²)?

R: $F = G \operatorname{tg} \alpha = 20$ N.

13. Să se calculeze tensiunile din firele A, B și C din montajele reprezentate în figurile 8.46, *a* și *b*. Se dă $G = 80$ N.

R: *a)* $T_1 \approx 59$ N; $T_2 \approx 72$ N; $T_3 = 80$ N; *b)* $T_1 = 80$ N; $T_2 \approx 113$ N; $T_3 = 80$ N.

14. Trei forțe paralele cu intensitățile $F_1 = 1$ N; $F_2 = 4$ N; $F_3 = 7$ N sînt aplicate în trei puncte A, B și C, așezate în linie dreaptă, astfel ca $AB = BC = 10$ cm. A treia forță este de sens contrar celorlalte două. Să se determine intensitatea și punctul de aplicație D, al rezultantei celor trei forțe.

R: $R = 2$ N; $AD = 50$ cm; $CD = 30$ cm.

15. Un solid este acționat de două forțe concurente $F_1 = 5$ N și $F_2 = 10$ N care fac între ele un unghi de 120°. Să se determine forța F_3, concurentă cu primele două, ce trebuie aplicată solidului, pentru ca acesta să fie în echilibru.

R: $F_3 = 8{,}66$ N, perpendiculară pe F_1.

16. Un corp A, cu masa $m = 500$ g, este așezat pe un plan înclinat (fig. 8.47). Ce masă trebuie să aibă corpul B, suspendat la extremitatea firului care trece peste scripetele S, pentru a menține corpul A în echilibru? Se neglijează frecările.

R: $m_B = 250$ g.

17. O forță $F = 100$ N, orizontală, menține în echilibru static un corp așezat pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$ față de orizontală (fig. 8.48). Frecările sînt neglijabile. Să se calculeze greutatea corpului și reacțiunea planului înclinat.

R: $G = 100$ N; $N = 100\sqrt{2}$ N.

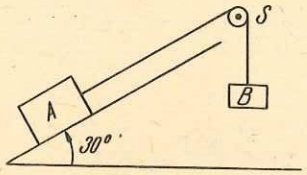


Fig. 8.47. La problema 16.

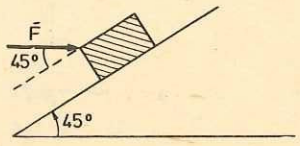


Fig. 8.48. La problema 17.

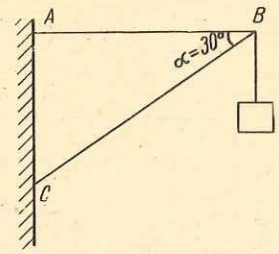


Fig. 8.49. La problema 18.

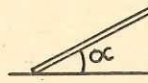


Fig. 8.50. La

18. Să se calculeze momentul greutății corpului suspendat în punctele A, B și C, dacă $CB = 1$ m, $\alpha = 30°$ și masa corp

R: 20

19. În figura 8.50 este reprezentat un muncitor care ține o torul acționează cu o forță maximă, cînd forța este perp cînd forța este îndreptată vertical în sus?

20. Un muncitor ține o scîndură de un capăt, astfel încît scî = 30° cu orizontala (fig. 8.50). Masa scîndurii este $m = 4$ mea forței cu care muncitorul susține scîndura, dac pendiculară pe scîndură.

R:

21. Un corp de formă cubică cu latura $l = 0{,}4$ m și cu mas suprafață orizontală. În fața corpului se află un mic prag aplicată o forță $F = 400$ N pentru ca reacțiunea normal (fig. 8.51)? (*Indicație:* reacțiunea normală în A este nul ridice în A deci cînd momentele f telor $\vec{G}$ și $\vec{F}$ în raport

22. O bară cu masa $m_0 = 10$ kg este montată așa cum se arat să poată susține un corp cu masa $m = 100$ kg. Să se calcul

R: $T = \frac{(2m +$

23. O bară omogenă, de grosime constantă, are lungimea l = 40 N. La una dintre extremitățile barei se sudează o s greutatea $G_2 = 10$ N. Să se determine poziția centrulu astfel format.

R: $d =$

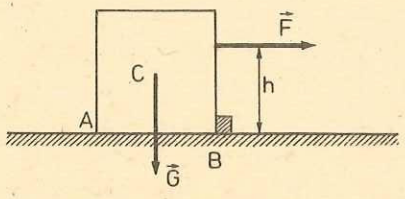


Fig. 8.51. La problema 21.

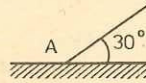


Fig.

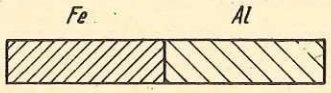


Fig. 8.53. La problema 27.

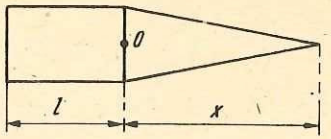


Fig. 8.54. La problema 28.

24. O placă pătrată omogenă este împărțită în patru pătrate. Se taie și se înlătură un pătrat. Să se determine poziția centrului de greutate al porțiunii rămase. Latura pătratului este $l = 1$ m.

R: $d = l\sqrt{2}/12 = 0{,}116$ m, față de centrul plăcii.

25. De la capătul unei bare cilindrice s-a tăiat o porțiune cu lungimea $l = 40$ cm. Să se calculeze distanța cu care s-a deplasat centrul de greutate al porțiunii rămase față de centrul de greutate al barei întregi.

R: $d = l/2 = 20$ cm.

26. Două bile cu razele egale sînt fixate în punctul de contact. Masa uneia dintre bile este de două ori mai mare decît a celeilalte. Să se determine poziția centrului de greutate al sistemului.

R: $d = (2/3)\ R$, față de centrul bilei cu masa mai mare.

27. O bară cilindrică cu lungimea $l = 30$ cm este făcută jumătate din oțel și jumătate din aluminiu (densitățile oțelului și aluminiului sînt $\rho_1 = 7\,860$ kg/m³ și $\rho_2 = 2\,700$ kg/m³). Să se determine poziția centrului de greutate al barei (fig. 8.53).

R: $x_{CG} = 11{,}34$ cm, față de extremitatea liberă a părții din oțel.

28. În figura 8.54 este reprezentată o placă metalică. Să se determine raportul dintre înălțimea x a părții triunghiulare și lungimea l a părții dreptunghiulare astfel ca centrul de greutate al plăcii să fie în punctul O.

R: $x = l\sqrt{3}$.

9

MECANICA FLUIDELOR

Mecanica fluidelor se ocupă cu echilibrul și mișca unea lor asupra pereților ce le înconjură sau asupr în ele.

Problema fundamentală a mecanicii fluidelor es tiției presiunilor și a vitezelor în interiorul fluidelor.

Mecanica fluidelor are următoarele părți:

a) statica fluidelor, care cuprinde statica lichid studiază lichidele în echilibru) și statica gazelor (aer gazele în echilibru);

b) dinamica fluidelor, care cuprinde dinamica lic care studiază mișcarea lichidelor) și dinamica gazel studiază mișcarea gazelor).

9.1. STAREA FLUIDĂ

Corpurile, din punctul de vedere al stării de agreg mari categorii: solide, lichide și gaze. Lichidele și g de fluide.

Solidele și fluidele se disting ușor prin caracterist

Noțiunea de solid este inseparabilă de cea de formă fiind repartizate la distanțe mici unele față de altele, f ele sînt mari, asigurînd solidelor o formă proprie. D fluid exclude complet noțiunea de formă.

Un fluid este, prin definiție, o substanță care poat vasului care o conține.

Lichidele sînt practic incompresibile. Forțele de culele lichidelor fiind mici, forma lor poate fi modif

mică. Ele își recapătă forma inițială, în momentul cînd forța încetează să acționeze.

Un lichid este totdeauna mărginit de o anumită suprafață care îl separă de corpurile solide sau gazoase. Suprafața de separare dintre lichid și gaz se numește *suprafață liberă.*

Gazele sînt perfect elastice și umplu totdeauna volumele ce le conțin. Ca și lichidele și gazele la volum constant nu opun o rezistență apreciabilă la schimbarea formei.

Corpurile gazoase nu au suprafețe libere.

Fluidele reale opun o rezistență la alunecarea unui strat peste altul sau la înaintarea unui corp în fluide și de aceea spunem că sînt vîscoase. Viscozitatea este deci rezultatul frecării dintre straturile paralele de fluid care alunecă unul peste altul.

Un fluid incompresibil și lipsit de viscozitate se numește *fluid ideal.* Fluidul ideal este un model fizic, el nu există în realitate, însă este foarte util, deoarece ușurează studiul anumitor fenomene și oferă un termen de comparație comod. Acest model de fluid ideal constituie o aproximație satisfăcătoare pentru un număr mare de lichide și chiar de gaze, atîta timp cît vitezele acestora sînt mai mici decît viteza sunetului.

9.2. NOȚIUNEA DE PRESIUNE

Presiunea este o mărime fizică egală cu raportul dintre mărimea forței $\vec{F}$, care apasă normal și uniform pe o suprafață și aria S a acestei suprafețe (fig. 9.1):

$$p = \frac{F}{S}. \tag{9.1}$$

Deoarece apăsarea forței nu poate fi uniformă pe orice suprafață, atunci relația (9.1) reprezintă presiunea medie pe o suprafață.

Unitatea de măsură pentru presiune este egală cu raportul dintre unitatea de măsură a forței și unitatea de măsură a ariei, adică N/m^2. Această unitate se numește Pascal și se notează cu Pa,

$$1\ \text{Pa} = 1\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

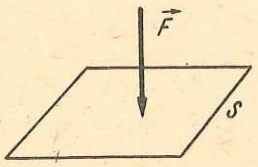


Fig. 9.1. Presiunea este raportul dintre mărimea forței ce apasă normal pe suprafață și aria suprafeței.

Pentru presiune se mai folosesc și unitățile următoare: torrul (torr), atmosfera fizică (atm), atmosfera tehnică (at).

$1\ \text{torr} = 1\ \text{mm Hg} \approx 133{,}3\ \text{N/m}^2,$

$1\ \text{atm} = 760\ \text{torr} = 1{,}013 \cdot 10^5\ \text{N/m}^2,$

$1\ \text{at} = 98\,066{,}5\ \text{N/m}^2,$

$1\ \text{torr} = 13{,}6\ \text{mm}\ H_2O.$

Un fluid este în echilibru cînd fiecare porți
Presiunea în fluidele în echilibru (în repaus) n
punctului în care este definită.

9.3.1. **Forța exercitată de către un fluid în care îl conține.** Considerăm un vas în care se află greutății sale, lichidul exercită o forță pe peretele lui acțiunilor reciproce și vasul exercită asupra l brează greutatea lichidului.

Să considerăm un element din suprafața pe (fig. 9.2) Forța exercitată de lichid, pe element mală pe acest element. Dacă această forță, pe c normală pe S, am putea să o descompunem în mală, $\vec{F}_n$ și o forță, componentă tangențială, $\vec{F}_t$. tangențiale, lichidul s-ar deplasa în lungul peretel în echilibru.

Existența forțelor de apăsare, exercitate de în care sînt închise, poate fi pusă în evidență pri

EXPERIMENT

Se introduce într-o cameră de minge de fot pudră de talc foarte fină și apoi se umflă came Peretele elastic al camerei se întinde, sub acți suprafața interioară a acesteia și camera ia o form determină să admitem că forțele exercitate de g camerei, au aceeași intensitate (fig. 9.3). Dacă se

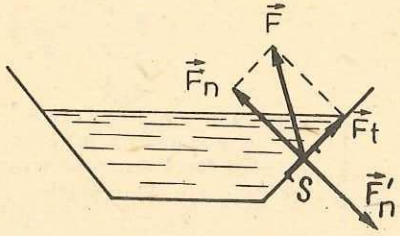


Fig. 9.2. Dacă lichidul ar exercita o forță de presiune oblică pe pereții vasului în care se află, atunci lichidul ar curge din vas.

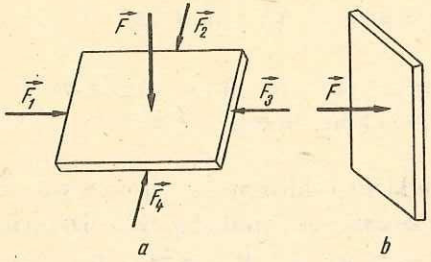


Fig. 9.4. Forța care acționează pe o suprafață din interiorul unui lichid este perpendiculară pe suprafață și nu depinde de orientarea acestei suprafețe în jurul centrului său.

foarte fin, continuînd să introducem în ea aer cu ajutorul pompei, constatăm că din cameră iese un jet de gaz perpendicular pe suprafața acesteia, făcut vizibil de către particulele de talc. Direcția de mișcare a particulelor de talc, care ies din camera de minge, dă direcția de acțiune a forțelor de presiune exercitate de gaz.

9.3.2. **Forța de apăsare exercitată de un fluid în echilibru pe suprafața unui corp cufundat în fluid.** Se introduce un solid în interiorul unui fluid (fig. 9.4). Fluidul exercită forțe de apăsare pe toate părțile suprafeței solidului care sînt în contact cu el. Pentru același motiv, arătat în paragraful precedent, aceste forțe sînt perpendiculare pe suprafețele pe care se exercită.

Existența forțelor de apăsare exercitate de lichide pe suprafețele corpurilor cufundate în lichide poate fi pusă în evidență cu ajutorul dispozitivului experimental prezentat în figura 9.5.

EXPERIMENT

Se folosește un cilindru de sticlă deschis la ambele capete și care poate fi astupat la partea inferioară cu un disc de plastic foarte ușor. De disc este legat un fir foarte subțire cu ajutorul căruia îl ținem în contact cu cilindrul, atunci cînd nu se află în lichid. Dacă se slăbește firul, cînd cilindrul este în aer, discul cade sub acțiunea propriei sale greutăți (fig. 9.5, *a*).

Se introduce cilindrul, astupat cu discul la partea inferioară, într-un vas cu apă. Se slăbește firul și se constată că discul nu cade. Asupra discului acționează o forță $\vec{F}$ orientată de jos în sus. Forța $\vec{F}$ este perpendiculară pe disc (fig. 9.5, *b*). Dacă forța $\vec{F}$ ar fi oblică, discul s-ar deplasa sub acțiunea

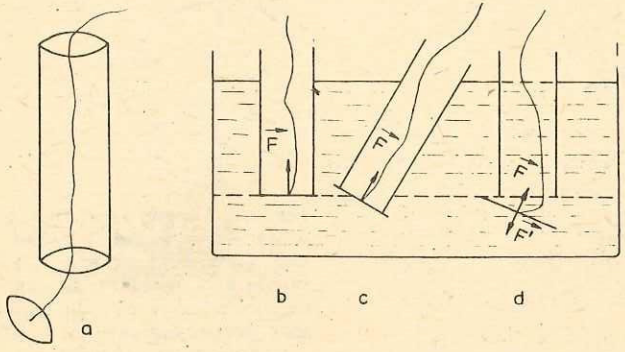


Fig. 9.5. Un lichid exercită pe orice suprafață în contact cu el o forță de apăsare perpendiculară pe această suprafață. În cazul *d* din figură, apa exercită pe cele două fețe ale discului forțele $\vec{F}$ și $\vec{F'}$ egale și opuse. În acest caz discul se desprinde de cilindru și cade sub acțiunea propriei sale greutăți.

acestei forțe și s-ar desprinde de cilindru. Se înclină că discul nu se deplasează (fig. 9.5, *c*). Se readuce c cală și se toarnă apă în el pînă la nivelul apei din discul se desprinde de cilindru, deci pe ambele fețe forțe egale și de sens opus (fig. 9.5, *d*).

9.3.3. **Presiunea hidrostatică.** În acest paragraf p următoare vom studia fenomenele specifice fluidelor se aplică și fluidelor gazoase.

Hidrostatica studiază lichidele în repaus. Statica fundă cu statica lichidelor ideale, deoarece forțele de în cazul lichidelor în repaus. Un lichid în echilibru se a propriei sale greutăți. Datorită greutății lor, păturile contact exercită presiuni unele asupra altora; în cazu echilibru, presiunea exercitată la un anumit nive *hidrostatică*.

Pentru a găsi factorii de care depinde presiunea lichid în echilibru vom folosi capsula manometrică. metrică la un tub (*4*) în formă de *U* (fig. 9.6), prin i (*3*). Tubul (*4*) conține un lichid colorat, care are acel muri. Exercitînd o apăsare pe membrana elastică, a din cutie care determină o scădere a nivelului lichi tubului în formă de *U* și o creștere a nivelului în ra permite compararea presiunilor exercitate pe supr (fig. 9.7).

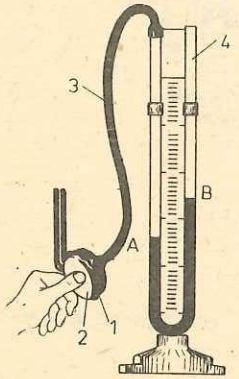


Fig. 9.6. Capsula manometrică folosită pentru punerea în evidență a forțelor exercitate pe suprafața unui solid introdus într-un lichid este alcătuită dintr-o cutie metalică *1* care are un perete elastic 2.

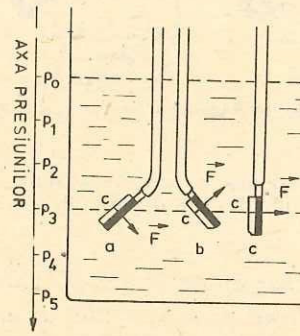


Fig. 9.7. Presiunea într-un lich adîncimea; *b)* are o valoare unui plan orizontal; *c)* într lichidului are aceeași valo

1. Se introduce capsula într-un vas cu apă, la o adîncime din ce în ce mai mare şi se compară presiunile la diferitele nivele (fig. 9.7).

Se constată că presiunea într-un lichid în repaus creşte cu adîncimea.

2. La o anumită adîncime în lichid se orientează membrana în diferite direcţii încît centrul său C să rămînă în acelaşi punct din interiorul lichidului. Se constată că denivelarea în tubul în U rămîne constantă (fig. 9.7).

Rezultă că, *presiunea într-un punct al lichidului este independentă de orientarea suprafeţei pe care se exercită. Într-un punct din interiorul lichidului presiunea are aceeaşi valoare în toate direcţiile.*

3. Se deplasează capsula astfel ca centrul membranei să rămînă în acelaşi plan orizontal; denivelarea h rămîne constantă.

Presiunea exercitată de un lichid în repaus este aceeaşi în toate punctele unui plan orizontal. Deci, într-un lichid în repaus, planele orizontale sînt suprafeţe de egală presiune.

4. Se introduce succesiv capsula manometrică, la o adîncime H, în alcool, apă distilată, saramură (soluţie de sare în apă) şi se constată că denivelarea h variază în funcţie de densitatea lichidului (fig. 9.8).

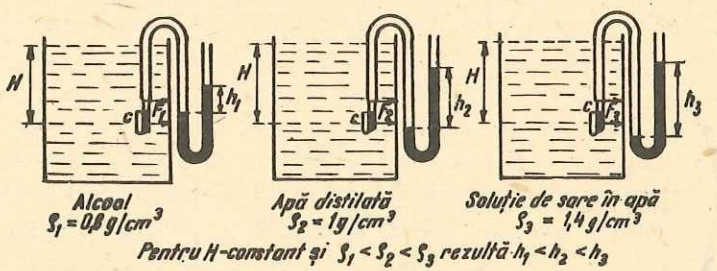


Fig. 9.8. Presiunea în puncte situate la aceeaşi adîncime în lichide diferite depinde de natura lichidului.

Presiunea în punctele aflate la aceeaşi adîncime în lichide diferite depinde de natura lichidului, fiind proporţională cu densitatea lichidului.

9.3.4. **Diferenţa de presiune dintre două puncte din interiorul unui lichid.** Într-un recipient se află un lichid în repaus. Limităm un volum V de lichid de formă paralelipipedică cu aria bazei S şi înălţimea h. Presupunem că lichidul cuprins în volumul V a fost delimitat printr-o peliculă foarte subţire, fără greutate şi inextensibilă, ceea ce nu modifică echilibrul volumului de lichid astfel delimitat (fig. 9.9). Lichidul cuprins în volumul V are greutatea:

$$G = \rho g S(h_2 - h_1) = \rho g S h, \qquad (9.2)$$

unde ρ este densitatea lichidului, $h = h_2 - h_1$ est înălţimea paralelipipedului şi S aria bazei paralelip pedului.

Presiunea exercitată de către lichid pe faţa infe rioară B a paralelipipedului, aflată la adîncimea h_2, ar valoarea p_2. Pe faţa superioară aflată la nivelul h_1 s exercită presiunea p_1. Forţele de apăsare exercitate d către lichid pe feţele paralelipipedului sînt normale p aceste feţe. Forţele care acţionează pe feţele lateral îşi anulează reciproc efectele, ele avînd valori egale ş de sens opus. Pe faţa superioară acţionează forţa $\vec{F}_1$ de intensitate $F_1 = p_1 S$, iar pe faţa inferioară acţio nează forţa $\vec{F}_2$, de intensitate $F_2 = p_2 S$. Scriind con diţia de echilibru pentru paralelipiped, obţinem:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} = 0, \qquad (9.3$$

Proiectînd ecuaţia vectorială (9.3) pe axa Oz obţinem:

$$p_2 S - p_1 S - \rho g S h = 0,$$

de unde

$$p_2 - p_1 = \rho g h,$$

unde $p_2 - p_1$ este diferenţa de presiune între nivelele h

Putem enunţa principiul fundamental al hidrost

Diferenţa de presiune între două puncte dintr-un numeric egală cu greutatea unei coloane din acel unitatea de suprafaţă şi ca înălţime distanţa dint punctele respective.

Dacă la nivelul *2* presiunea este p, iar nivelul *1* liberă a lichidului, atunci:

$$p - H = \rho g h \text{ sau } p = H + \rho g h,$$

H fiind presiunea atmosferică.

Se constată că *presiunea hidrostatică este indepen în care se află lichidul şi că este aceeaşi în toate pun adîncime în lichid.* Din relaţia (9.5) rezultă că dacă se suprafaţa liberă a lichidului, presiunea p din interior aceeaşi cantitate.

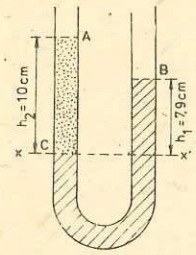


Fig. 9.10. Pentru problema rezolvată.

EXEMPLU

Într-un tub în formă de U (fig. 9.10) se toarnă apă cu densitatea $\rho_1 = 1{,}00$ g/cm³ și apoi în una dintre ramuri se toarnă un lichid care nu se amestecă cu apa, de densitate ρ_2 necunoscută. Înălțimile coloanelor de lichid, în cele două ramuri, deasupra suprafeței de separare a lichidelor, sînt indicate pe figura 9.10. Să se calculeze densitatea ρ_2.

Rezolvare. Suprafețele de separare apă-aer, apă-lichid, lichid-aer sînt plane orizontale. În A și B presiunile p_A și p_B sînt egale cu presiunea atmosferică $H (p_A = p_B = H)$.

Pe suprafața de separare xx' apă-lichid, presiunile în apă și în lichid sînt egale ($p_1 = p_2$). La acest nivel presiunile sînt:

$p_1 = H + \rho_1 g h_1$, presiunea în apă, și
$p_2 = H + \rho_2 g h_2$, presiunea în lichid.

Deoarece $p_1 = p_2$, rezultă:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2 \text{ și } \rho_2 = \frac{\rho_1 h_1}{h_2} = 0{,}79 \text{ g/cm}^3.$$

9.3.5. **Măsurarea presiunii atmosferice.** Aerul este cel mai răspîndit gaz. El înconjură toată suprafața Pămîntului într-o pătură foarte groasă numită atmosferă terestră.

Aerul este peste tot în jurul nostru, însă noi nu-l vedem el fiind incolor, fără gust și fără miros.

Atmosfera este alcătuită dintr-un amestec de gaze cu vapori de apă, cristale de gheață, praf și diverse impurități. Compoziția atmosferei variază atît cu altitudinea cît și pe suprafața terestră. Atmosfera nu are o limitare precisă, ea trece treptat în spațiul interplanetar.

Masa atmosferei este enormă, ea fiind egală cu $6 \cdot 10^5$ tone. Greutatea acestei mase de aer exercită o presiune continuă pe suprafața Pămîntului, numită *presiune atmosferică*. Datorită presiunii atmosferice, pe suprafețele aflate în atmosferă, se exercită forțe de apăsare foarte mari.

Datorită greutății aerului straturile inferioare de aer sînt comprimate de către cele superioare. Deci densitatea atmosferică scade cu înălțimea.

EXEMPLU

Să se determine forța de apăsare exercitată de către aerul atmosferic pe una dintre fețele geamului unei ferestre de formă dreptunghiulară cu laturile de 80 cm și 120 cm.

Presiunea atmosferică are valoarea $H = 1{,}013 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Rezolvare. Forța de apăsare are intensitatea:

$$F = HS = 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \cdot 0{,}96 \text{ m}^2 = 9{,}72 \cdot 10^4 \text{ N}.$$

Forța de presiune exercitată pe geam echivalează cu greutatea unei mase de 9,72 tone. Geamul rezistă acestei presiuni mari, deoarece el este presat pe ambele fețe.

Aerul aflat deasupra noastră și în jurul nos
pe corpul nostru. Forțele de presiune mari exerci
supărătoare pentru că organismul nostru s-a adap
siune. Nu am putea să respirăm normal sau chiar
siune s-ar modifica mult.

Presiunea atmosferică într-un punct al atmo
tea unei coloane de aer, cu secțiune egală cu unita
diferența de nivel dintre acel punct și suprafața
presiune nu se poate calcula, deoarece nu se
superioară a atmosferei și datorită faptului că atm

Presiunea atmosferică se poate determina ex
simplă propusă de către fizicianul italian Torric

Pentru determinarea presiunii atmosferice s
gimea de aproximativ un metru și închis la unu
barometric sau tubul lui Torricelli. Tubul baron
apoi se astupă cu degetul și se răstoarnă într-o
degetul se constată că o parte din mercurul din
loana de mercur rămasă în tub, măsurată de la s
din cuvă pînă la suprafața liberă a mercurului d
aproximativ 76 cm (fig. 9.11, *a* și *b*). Pe suprafața
presiunea este zero (p_C=0), deoarece deasupra
Porțiunea tubului în care se află vid se numește

Mercurul fiind în echilibru, presiunea în toat
tal AB, care cuprinde și suprafața liberă a merc
stantă (fig. 9.11, *b*). Deci presiunile în punctele
În A se exercită presiunea atmosferică pe care o
În B, acționează presiunea hidrostatică datorată

$$p_B - p_C = \rho g h,$$

deoarece $p_C = 0$, rezultă:

$$p_B = H = \rho g h.$$

Deci, presiunea atmosferică este egală cu presiu-
nea hidrostatică a coloanei de mercur din tub.
Măsurarea presiunii atmosferice, într-un anumit
punct din atmosferă, se reduce la măsurarea lun-
gimii coloanei de mercur h; ρ și g fiind mărimi
cunoscute.

Cum presiunea hidrostatică este indepen-
dentă de forma și secțiunea vasului, rezultă
că dacă se înclină tubul sau se face experiența cu
tuburi de forme diferite, înălțimea coloanei de
mercur h nu se modifică (fig. 9.12).

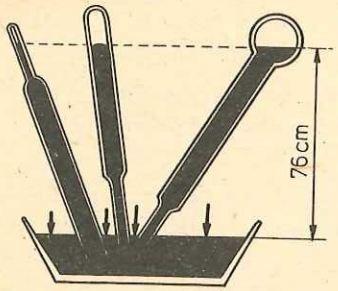


Fig. 9.12. Înălțimea coloanei de mercur este independentă de forma, de secțiunea și de înclinarea tubului.

Presiunea atmosferică variază:

— cu *altitudinea*, datorită greutății aerului. Măsurătorile au arătat că această variație nu este uniformă (fig. 9.13);

— cu *starea vremii*. Starea vremii depinde de deplasarea maselor de aer atmosferic, adică de mișcările ciclonilor și anticiclonilor atmosferici;

— *de la un loc la altul*. Pe hărțile meteorologice se observă linii continue, care unesc punctele în care presiunea are aceeași valoare la un moment bine determinat. Curbele acestea se numesc *izobare* și sînt foarte utile pentru prevederea stării vremii.

Avînd în vedere că presiunea variază de la un loc la altul și chiar în același loc de la o oră la alta, se impune definirea unei presiuni de referință, numită *presiune atmosferică normală*.

Presiunea atmosferică normală se consideră, prin convenție, ca fiind egală cu 760 torr.

Exprimată în N/m^2 presiunea atmosferică normală are valoarea $H_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ N/m^2.

Instrumentele cu care se măsoară presiunea atmosferică și se observă schimbările ei se numesc *barometre*. În practică se folosesc două feluri de barometre: *a) barometrul metalic*, a cărui funcționare se bazează pe echilibrarea forțelor de presiune atmosferică de către forțele elastice ale unui resort; *b) barometrul cu mercur*, a cărui funcționare se bazează pe echilibrarea presiunii atmosferice de către presiunea hidrostatică a unei coloane de mercur. Primul barometru de acest tip a fost tubul lui Torricelli.

9.3.6. **Măsurarea presiunii gazelor. Manometrul cu lichid.** Presiunile în fluide (gazoase sau lichide) se măsoară cu instrumente numite *manometre*. Vom descrie doar manometrul cu lichid folosit pentru măsurarea presiunii gazelor.

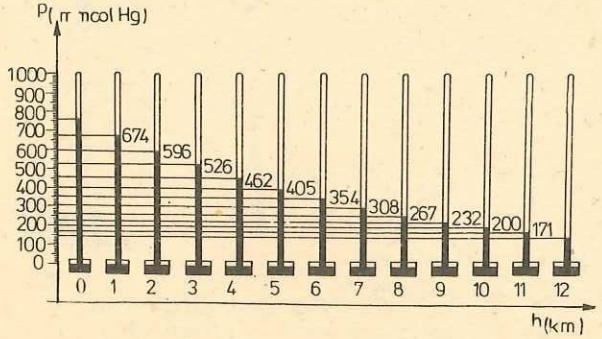


Fig. 9.13. Presiunea atmosferică variază cu altitudinea.

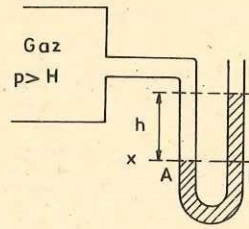


Fig. 9.14. Principiul manometrului cu lichid.

Manometrul cu lichid este alcătuit dintr-un
la ambele capete, în care s-a turnat un lichid
mercur sau apă).

O ramură a tubului în U comunică cu at
comunică cu gazul de presiune p. În cazurile prez
este presiunea atmosferică, presiunea de măsurat

$$p = H \pm \rho gh.$$

În relația (9.6) se ia semnul plus cînd $p > H$ ș

Diferența de presiune

$$p - H = \pm \rho gh,$$

se numește *presiune relativă* sau *presiune man*

Lichidul manometric se alege în funcție d
exemplu, un manometru cu apă dă o denivelare
un manometru cu mercur.

Pentru măsurarea directă a presiunii p, se
folosește, în locul tubului în U deschis, un ba-
rometru cu sifon racordat cu un tub de
cauciuc la recipientul care conține gazul
(fig. 9.15.) În acest caz presiunea gazului este
echilibrată de presiunea hidrostatică a unei
coloane de mercur h:

$$p = \rho gh.$$

EXEMPLU

Un manometru cu mercur (fig. 9.14, *b*) este pus în le
Denivelarea manometrică este $h = 5$ mm. Presiune
$H = 753$ torr. Care este presiunea gazului? Care es
sirii unui manometru cu apă?

Rezolvare. Presiunea gazului fiind mai mică decît

$$p = H - \rho gh.$$

Ținînd cont de valorile numerice obținem:

$$p = 753 \text{ torr} = 753 \text{ torr} \cdot \frac{1 \text{ atm}}{760 \text{ torr}} = 0{,}99 \text{ atm} =$$

$$= 0{,}99 \cdot 1{,}013 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 \simeq 10^5 \text{ N/m}^2 = 1 \text{ at.}$$

Dacă lichidul barometric ar fi apa, acest lichid ar trebui să producă o presiune hidrostatică egală cu aceea produsă de mercur:

$$\rho_{Hg} \cdot g h_{Hg} = \rho_a \cdot g h_a; \; h_a = \frac{13\,600 \cdot 5}{1\,000} = 68 \text{ mm.}$$

9.3.7. Transmiterea presiunii în lichide. Legea lui Pascal

EXPERIMENT

Se umple complet cu apă un vas cu două deschideri tubulare (fig. 9.16) și se astupă fiecare deschidere cu un dop de cauciuc uns cu grăsime. Se are în vedere ca dopurile să fie în contact cu apa. Dacă se presează puternic pe unul dintre dopuri celălalt este aruncat în aer. Variația presiunii din B se transmite și în A și determină dopul A să sară din locașul său.

Experimentul descris mai sus ilustrează *legea lui Pascal* care se enunță astfel:

Presiunea exercitată pe o suprafață oarecare a unui lichid aflat în repaus se transmite în toate direcțiile și cu aceeași intensitate în tot lichidul cît și la pereții vasului care-l conține.

Legea lui Pascal este o consecință a legilor staticii fluidelor și rezultă din acestea.

Fie p_A și p_B presiunile în punctele A și B dintr-un lichid în repaus (fig. 9.17). Conform principiului fundamental al hidrostaticii rezultă:

$$p_B - p_A = \rho g h.$$

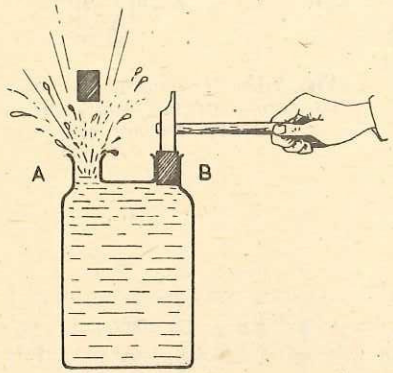


Fig. 9.16. Dispozitiv experimental pentru punerea în evidență a transmiterii presiunii printr-un lichid.

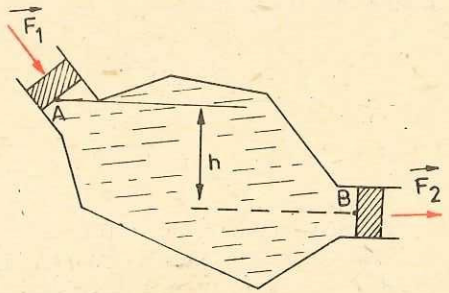


Fig. 9.17. Transmiterea presiunii printr-un lichid.

Cum mărimile ρ, g, h sînt constante, diferența de presiune este și ea constantă, chiar dacă se mărește sau se micșorează presiunea din punctele A și B. Deci, orice variație de presiune în A provoacă o variație egală de presiune în B, precum și în toate punctele lichidului.

9.3.8. **Aplicații ale legii lui Pascal. Presa hidraulică.** Una dintre aplicațiile principale ale legii lui Pascal este presa hidraulică al cărei principiu este dat în figura 9.18. Două vase cilindrice comunică între ele prin partea inferioară. Cei doi cilindri sînt închiși la partea superioară prin două pistoane mobile P și P_1.

Se exercită pe pistonul P, de secțiune S, o fo forță produce în toate punctele lichidului o creșter

$$p = \frac{F}{S}.$$

Această presiune este integral transmisă pe fața in de secțiune S_1, care este astfel acționat de o forță $\vec{F}_1$,

$$F_1 = pS_1. \qquad (9.9)$$

Din relațiile (9.8) și (9.9) obținem:

$$F_1 = F \frac{S_1}{S}. \qquad (9.10)$$

Intensitatea forței F_1 este cu atît mai mare cu cît raportul ariilor fețelor pistoanelor este mai mare.

Presa hidraulică este folosită pentru a comprima paiele și bumbacul în baloturi, pentru a extrage uleiul din diferitele semințe, la fabricarea caroseriilor de automobil și a obiectelor din material plastic etc.

O aplicație a presei hidraulice este și sistemul de frînare al automobilelor, schematizat în figura 9.19.

O apăsare pe pedala *1* produce o creștere a presiunii în cilindrul *3*. Această creștere de presiune este transmisă prin intermediul lichidului *2*, pistoanelor *4*, care împing saboții *6*, pe tamburul *5*.

BLAISE PASCAL (1623—1662).

Matematician, fizician, filozof şi scriitor francez. Pascal a fost un spirit precoce care s-a manifestat foarte timpuriu. La 12 ani, el regăseşte singur, primele teoreme ale geometriei lui Euclid. La 16 ani, scrie un „Tratat despre secţiunile conice". Pascal este fondatorul teoriei probabilităţilor. A inventat o maşină de calcul în anul 1642.

În domeniul fizicii, activitatea lui Pascal a fost îndreptată, mai ales, asupra presiunii atmosferice şi asupra vidului. Pascal a descoperit legea fundamentală a hidrostaticii care stă la baza tuturor sistemelor hidraulice.

9.3.9. **Legea lui Arhimede.** Pentru a introduce o sticlă goală într-o căldare cu apă, trebuie să se exercite asupra ei o forţă de apăsare destul de mare. O minge de tenis de masă introdusă pe fundul unui vas cu apă şi apoi lăsată liberă, iese singură la suprafaţă. Dacă o piatră grea este introdusă în apă, cînd este ridicată, ea pare mai uşoară decît în aer. Greutatea pietrei nu s-a modificat, pentru că forţele de atracţie gravitaţională sînt independente de natura mediului care separă corpurile. Fie că piatra este în aer sau în apă, forţa de atracţie pe care o exercită Pămîntul asupra ei, este aceeaşi. Rezultă că lichidul împinge corpul vertical în sus. Vom dovedi aceasta experimental.

EXPERIMENT

Se suspendă un cilindru de fier, cu ajutorul unui fir, de un dinamometru. Citim pe dinamometru greutatea sa, de exemplu 2,5 N. Se cufundă corpul în apă. Se constată că direcţia firului de suspensie nu s-a modificat. Dinamometrul indică acum o forţă de numai 1,5 N (fig. 9.20).

Rezultă că *un corp cufundat într-un lichid este împins de către lichid cu o forţă verticală orientată de jos în sus. Această forţă se numeşte forţă arhimedică.*

Înlocuind cilindrul metalic cu un alt corp mai voluminos se constată că forţa arhimedică este mai mare. Deci, *forţa de împingere exercitată asupra unui corp cufundat într-un lichid creşte cu volumul de lichid dezlocuit.*

Se cufundă acum corpul într-un alt lichid, în alcool sau în soluţie de sare de bucătărie în apă şi se constată că indicaţiile dinamometrului s-au modificat. Deci, *forţa de împingere exercitată de un lichid, asupra unui corp cufundat în el, depinde de densitatea lichidului.*

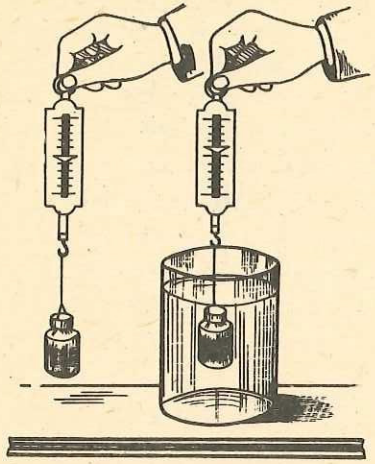


Fig. 9.20. Apa exercită asupra cilindrului o forţă de apăsare verticală, orientată de jos în sus.

Legea lui Arhimede se enunţă astfel:

un corp cufundat într-un fluid în repaus este împ de jos în sus, egală cu greutatea volumului de

Legea lui Arhimede este, de asemenea, o consecinţă ale staticii fluidelor, şi deci se poate deduce din aces

Considerăm un corp de forma unui cilindru dre verticală într-un lichid în repaus (fig. 9.21). Notăm c înălţimea cilindrului.

Conform principiului fundamental al hidrostaticii, suprafaţa laterală a cilindrului îşi fac echilibru. Rezulta verticale, normale pe bazele cilindrului, este:

$$F_A = F_2 - F_1 = (p_2 - p_1)S,$$

sau ţinînd seamă de relaţia (9.4), obţinem:

$$F_A = \rho g(h_2 - h_1)S = \rho hSg = G_l,$$

unde $h = h_2 - h_1$ este înălţimea cilindrului, ρ este de G_l este greutatea lichidului dezlocuit de corp.

Deci, rezultanta $\vec{F}_A$ a forţelor de presiune exercita fundat în fluid, numită forţă arhimedică, este egală şi tatea volumului de fluid dezlocuit de corp. Punctul î arhimedică se numeşte *centru de presiune.* În general, ce diferit de centrul de greutate, în afară de cazul particula în fluid este omogen. În acest caz, centrul de greutate coincid.

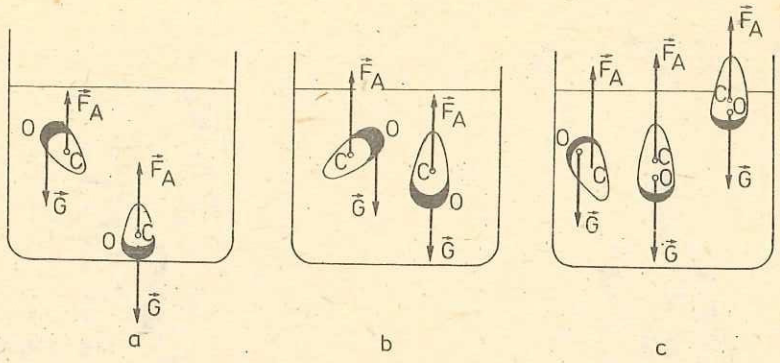


Fig. 9.22. Echilibrul corpurilor cufundate într-un lichid.

Legea lui Arhimede se aplică fluidelor lichide sau gazoase, lichidelor neomogene în repaus (de exemplu în cazul a două lichide care nu se amestecă, turnate unul peste altul) cît şi pentru corpurile necufundate complet.

9.3.10. **Plutirea corpurilor.** Un corp introdus într-un lichid este supus acţiunii a două forţe: greutatea sa $\vec{G}$ aplicată în centrul de greutate al corpului şi forţa arhimedică $\vec{F}_A$ aplicată în centrul de presiune C. Trei cazuri se pot ivi (fig. 9.22):

a) $G > F_A$. Rezultanta $\vec{G}_a = \vec{G} + \vec{F}_A$ se numeşte greutatea aparentă şi are modulul:

$$G_a = mg - \rho_f V g = mg\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_s}\right), \qquad (9.12)$$

unde ρ_f este densitatea fluidului iar ρ_s este densitatea solidului. Dacă $\rho_f < \rho_s$ corpul se cufundă.

b) $G = F_A$. Greutatea aparentă este zero şi corpul rămîne în echilibru în interiorul lichidului. Dacă corpul este omogen, condiţia se scrie: $\rho_f = \rho_s$. În acest caz centrul de presiune coincide cu centrul de greutate. Dacă solidul este neomogen, centrul de presiune şi centrul de greutate nu coincid. Pentru ca echilibrul să fie stabil este suficient ca centrul de greutate şi centrul de presiune să fie pe aceeaşi verticală, iar centrul de greutate să se găsească sub centrul de presiune.

c) $G < F_A$. Rezultanta $\vec{F}_a = \vec{G} + \vec{F}_A$ se numeşte forţă ascensională. Un corp cufundat este adus la suprafaţa lichidului de către forţa ascensională. Pe măsură ce corpul iese din lichid forţa arhimedică scade. În momentul cînd greutatea corpului echilibrează forţa arhimedică, corpul pluteşte în echilibru la suprafaţa lichidului.

Pentru un corp omogen condiţia de plutire la suprafaţa lichidului se scrie: $\rho_f > \rho_s$.

Condiţia de plutire a corpurilor se enunţă astfe
în echilibru în interiorul sau la suprafaţa unui lichid în
lui este egală cu greutatea volumului de lichid

9.3.11. **Consecinţe şi aplicaţii ale plutirii corpuri**

A. *Corpuri în echilibru în interiorul unui lichid*

Submarinul este o navă care poate pluti la supr
posedă nişte rezervoare laterale numite balast-apă.
cu apă nava se scufundă, iar cînd apa este evacuat
submarinul urcă la suprafaţă (fig. 9.23).

Batiscaful destinat explorărilor submarine funcţi
cipiu ca şi submarinul.

B. *Corpuri care plutesc la suprafaţa apei.*

Icebergurile sînt blocuri uriaşe de gheaţă care plu
densitatea gheţii este mai mică decît densitatea apei (
volumul unui iceberg cufundat în apă reprezintă 11

Navele, datorită formei lor, dezlocuiesc un volum
consecinţă forţa arhimedică este mult mai mare decît
de 10 000 tone trebuie să dezlocuiască cel puţin 10 0
putea pluti.

Plutirea navelor este stabilă cînd centrul de greu
verticală cu centrul de presiune şi deasupra centrului
Cînd nava oscilează centrul de presiune îşi schimbă poz
tatea $\vec{G}$ şi forţa arhimedică $\vec{F}_A$ formează un cuplu care t
poziţia iniţială. Suportul forţei arhimedice întîlneşte
într-un punct M numit metacentru. Echilibrul este st
este deasupra centrului de greutate. Punctul M are o p
nava.

C. *Densimetrele* sînt instrumente utilizate pentru d
lichidelor.

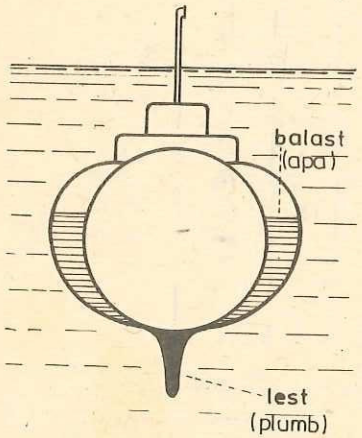


Fig. 9.23. Submarinul.

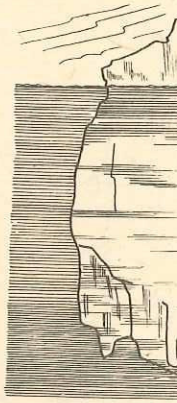


Fig.

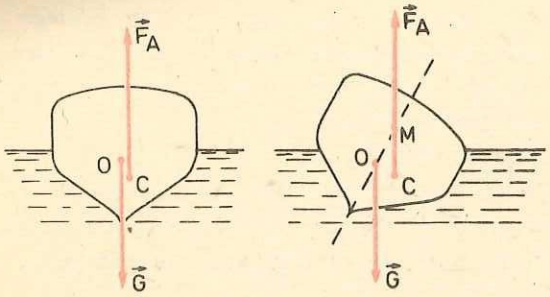


Fig. 9.25. Echilibrul unei nave.

Un densimetru este alcătuit dintr-un tub de sticlă numit plutitor, în care se află la partea de jos alice de plumb sau mercur, prelungit cu o tijă de sticlă subțire.

Densimetrele se gradează în unități de densitate. Gradațiile se fac pe tija de sticlă.

Există două feluri de densimetre:

— densimetre pentru lichide cu densitatea mai mică decît a apei, gradate de la *0,6* la *1*. Introduse în apă, acestea se cufundă pînă la baza tijei, unde se află gradația *1* (fig. 9.26). Gradația *1* de la baza tijei reprezintă densitatea apei de 1 g/cm³;

— densimetre pentru lichide mai dense decît apa, gradate de la *1* la *2*. Introduse în apă, ele se cufundă pînă aproape de extremitatea superioară a tijei, unde se află gradația *1* (fig. 9.27).

EXEMPLE

1. O sferă cu densitatea $\rho_1 = 500$ kg/m³ cade fără viteză inițială de la înălțimea $h_1 = 20$ m, într-un bazin adînc, plin cu apă (fig. 9.28). Să se calculeze adîncimea la care se va opri sfera în apă. Densitatea apei este $\rho_2 = 1\,000$ kg/m³; $g = 10$ m/s².

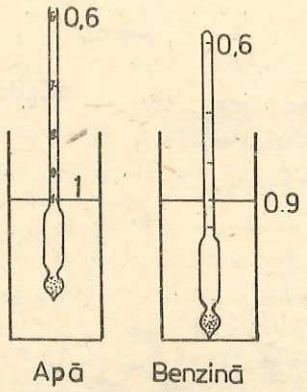


Fig. 9.26. Densimetre pentru lichide cu densitatea mai mică decît densitatea apei.

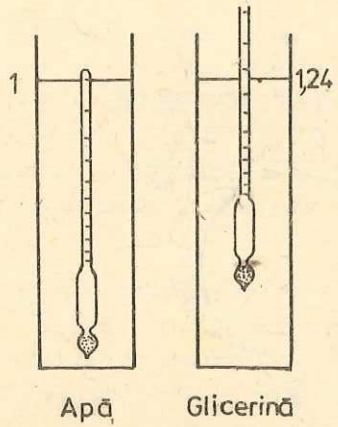


Fig. 9.27. Densimetre pentru lichide cu densitatea mai mare decît densitatea apei.

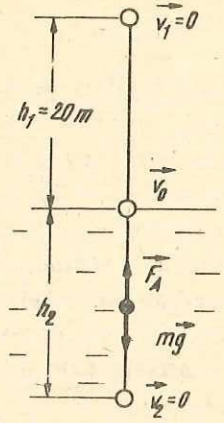


Fig. 9.28. La exemplul 1.

Rezolvare. a) *Calculul vitezei sferei în momentul cînd* formula lui Galilei obținem:

$$v_0 = \sqrt{2gh_1} = 20 \text{ m/s}.$$

b) *Calculul accelerației sferei în timpul mișcării ei în* asupra sferei acționează forța arhimedică $F_A = \rho_2 Vg$ ș Scriem relația fundamentală a dinamicii pentru mi

$$F_A - mg = ma.$$

Din relația (9.13), obținem:

$$a = \frac{F_A}{m} - g.$$

Înlocuind în această relație forța arhimedică prin va $m = \rho_1 V$, obținem:

$$a = g\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right) = 10 \text{ m/s}$$

c) *Calculul adîncimii* h_2, *la care se oprește sfera:*

$$h_2 = \frac{v_0^2}{2a} = 20 \text{ m}.$$

2. Un aerostat cu masa $m = 500$ kg și volumul $V = 600$ mișcare uniform accelerată (fig. 9.29).

Să se calculeze înălțimea la care se ridică aerostatul aerului este $\rho = 1{,}3$ kg/m³; $g = 10$ m/s². Se neglijează

Rezolvare. a) *Calculul accelerației aerostatului.* Asupra arhimedică $F_A = \rho g V$ (unde ρ este densitatea aerului relația fundamentală a dinamicii pentru mișcarea aeros

$$F_A - mg = ma.$$

$$a = \frac{F_A}{m} - g = \frac{\rho g V}{m} - g = 5{,}6$$

b) *Calculul înălțimii la care urcă aerostatul în timpul* $t =$

$$h = \frac{at^2}{2} = 280 \text{ m}.$$

9.4. DINAMICA FLUIDELOR

9.4.1. **Curgerea staţionară.** Prin curgerea unui fluid se înţelege deplasarea acestuia faţă de un sistem de referinţă dat. Un fluid ideal, adică un fluid incompresibil şi lipsit de viscozitate, poate fi pus în mişcare datorită greutăţii sale şi diferenţei de presiune între diferitele puncte din interiorul său.

Fenomenele de mişcare a fluidelor au un caracter macroscopic, fluidele fiind asimilate cu medii continue. În cazul fluidelor continue este posibilă o mişcare care să constea din deplasarea diferitelor părţi ale aceluiaşi corp una faţă de alta. Pentru descrierea curgerii unui fluid, îl vom considera alcătuit dintr-un număr foarte mare de particule, caracterizate prin aceea că au un *volum* foarte mic în raport cu acela al corpului.

Studiem mişcarea particulelor fluidului în raport cu un anumit sistem de referinţă, faţă de care fixăm poziţiile particulelor de fluid.

Mişcarea unui fluid este caracterizată prin distribuţia vitezelor şi a presiunilor în interiorul fluidului. Aceste mărimi variază de la un punct la altul. În acelaşi punct ele pot varia, de asemenea, în funcţie de timp. În acest caz curgerea (mişcarea) fluidelor se numeşte nepermanentă (nestaţionară) sau variată. De viteză este legată şi noţiunea de *linie de curent. Se numeşte linie de curent la un moment dat t, linia curbă care are proprietatea că, la acel moment, vitezele diferitelor particule care se află pe ea îi sînt tangente* (fig. 9.30). În general aceste particule au traiectorii care nu se confundă cu linia de curent pe care se află ele la un moment dat *t*.

Cînd viteza în diferitele puncte ale spaţiului ocupat de fluid nu depinde explicit de timp, ci numai de poziţia în care se află particula de fluid considerată, curgerea se numeşte *staţionară.*

În cazul curgerii nestaţionare, forma liniilor de curent se schimbă de la un moment la altul. În cazul curgerii staţionare, aspectul liniilor de curent rămîne neschimbat, forma lor fiind independentă de timp şi atunci traiectoriile particulelor de fluid coincid cu liniile de curent. În curgerea staţionară putem fixa poziţia unei particule de fluid de-a lungul liniei de curent cu ajutorul coordonatei curbilinii s (fig. 9.30). Cum viteza şi presiunea variază de la un punct la altul, înseamnă că ele sînt funcţii de s:

$$v = v(s);\ p = p(s). \tag{9.14}$$

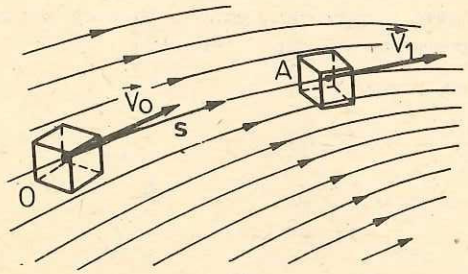


Fig. 9.30. Linii de curent în interiorul unui fluid ideal. În cazul mişcării staţionare acestea coincid cu traiectoriile particulelor de fluid. Poziţia unei particule de fluid pe linia de curent se poate determina cu ajutorul coordonatei curbilinii s, luată de-a lungul liniei de curent.

În curgerea staţionară liniile de curent nu se intersectează. Astfel, liniile de curent, în cazul fluidului ideal, pot materializa pereţii unui tub, prin care curge un fluid. De aceea liniile de curent care trec prin toate punctele unui contur închis formează un *tub de curent* (fig. 9.31).

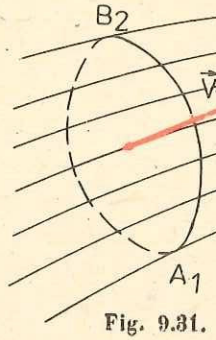


Fig. 9.31.

9.4.2. **Ecuaţia de continuitate.** *Cantitatea de fluid care străbate o anumită arie în unitatea de timp reprezin acea arie.* Debitul poate fi de masă sau de volum, fluid reprezintă o masă sau un volum de fluid.

Debitul de masă se exprimă prin relaţia:

$$Q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t},$$

unde Δm este masa de fluid care străbate o anumit debitul de volum este dat de relaţia:

$$Q_V = \frac{\Delta V}{\Delta t},$$

unde ΔV este volumul de fluid care străbate o anun timp Δt.

Să considerăm un fluid în curgere staţionară şi tub de curent (fig. 9.32). Debitul de volum prin ari

$$Q_1 = \frac{S_1 v_1 \Delta t}{\Delta t} = S_1 v_1;\ Q_2 = S_2 v$$

Fluidul fiind incompresibil, ariile S_1 şi S_2 sînt străbă de fluid în unitatea de timp, deci:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Relaţia (9.15) se numeşte *ecuaţia de continuitate*

9.4.3. **Legea lui Bernoulli.** Această lege se aplică fluid ideal. Reamintim că un fluid ideal are urm *a)* nu are viscozitate; *b)* este incompresibil; *c)* vi fluid este independentă de timp.

Considerăm un tub de curent cu secţiunea variabi fluidului cuprins între secţiunile S_1 şi S_2 din tubul de

Ca urmare a incompresibilităţii fluidului, volum versează secţiunea S_1 în intervalul de timp Δt este ega care traversează secţiunea S_2 în acelaşi interval de ti

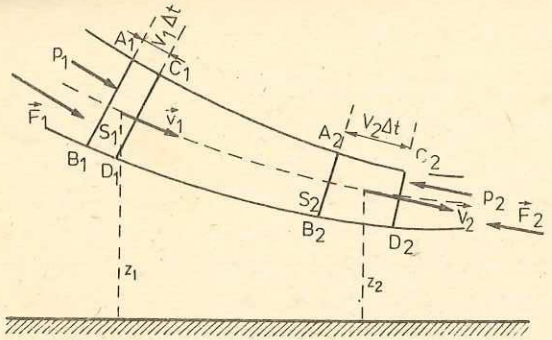


Fig. 9.32. Debitul de-a lungul unui tub de curent de fluid ideal în regim permanent este constant: $S_1v_1 = S_2v_2$.

De-a lungul liniei de curent $p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{constant}$.

Înmulțind relația (9.15) cu Δt obținem:

$$S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t,$$

sau $S_1 \cdot A_1C_1 = S_2 \cdot A_2C_2$,

de unde rezultă că

$$V_1 = V_2 = V.$$

Totul se petrece ca și cum în intervalul de timp Δt s-ar transfera direct din poziția $A_1B_1C_1D_1$ o masă de fluid $m = \rho V$, în poziția $A_2B_2C_2D_2$, fără ca lichidul intermediar să se fi mișcat.

Masa de fluid m are la traversarea secțiunii S_1 energia cinetică $\frac{1}{2}mv_1^2$, iar la traversarea secțiunii S_2 are energia cinetică $\frac{1}{2}mv_2^2$. Variația energiei cinetice a masei m, în intervalul de timp în care a fost transferată din poziția $A_1B_1C_1D_1$ în poziția $A_2B_2C_2D_2$, este:

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \tag{9.16}$$

și ea trebuie să fie egală cu lucrul mecanic al forțelor ce se exercită asupra sistemului considerat în intervalul de timp Δt. Aceste forțe sînt forțele de presiune $F_1 = p_1S_1, F_2 = p_2S_2$ care acționează asupra lichidului cuprins între secțiunile S_1 și S_2 și greutatea mg a lichidului transferat.

În intervalul de timp Δt în care masa m traversează secțiunea S_1 sub acțiunea forței $\vec{F}_1$ al cărei punct de aplicație se deplasează pe distanța A_1C_1, se efectuează următorul lucru mecanic motor:

$$L_1 = F_1 \cdot A_1C_1 = p_1S_1 \cdot A_1C_1 = p_1V = p_1\frac{m}{\rho}.$$

În același interval de timp forța $F_2 = p_2S_2$ care se exercită perpendicular pe secțiunea S_2 efectuează următorul lucru mecanic rezistent:

$$L_2 = -F_2 \cdot C_2A_2 = -p_2V = -p_2\frac{m}{\rho}.$$

Lucrul mecanic al greutății masei de lichid transferate este:

$$L_3 = -mg(z_2 - z_1).$$

Egalînd variația energiei cinetice a masei m cu lucrul mecanic rezultant al forțelor ce se exercită asupra acestei mase, obținem:

$$(p_1 - p_2)\frac{m}{\rho} + mg(z_1 - z_2) = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2), \tag{9.17}$$

sau $p_1 + \rho gz_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho gz_2 + \frac{1}{2}$

Aceasta este ecuația lui Bernoulli (1700—1782). Ecu
scrie și astfel

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gz = \text{constant} =$$

Constanta C este aceeași de-a lungul liniei de curent
timp. Termenii din relația (9.19) au toți dimensiunil
a-i distinge, în enunțuri se utilizează denumirile: „pres
„presiunea dinamică" pentru (1/2) ρv^2, „presiunea d
termen datorat energiei potențiale.

În cazul acțiunii fluidului asupra unui perete, pe
ΔS al peretelui se va exercita o forță de presiune $p\Delta$
relația (9.19).

În cazul particular cînd tubul de curent este pra
energia potențială este neglijabilă, obținem:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = C.$$

9.4.4. Aplicații ale legii lui Bernoulli. Să conside
printr-o conductă cu secțiunea variabilă. În porțiunil
prin care curge fluidul viteza acestuia crește; conform
crește și presiunea dinamică, de aceea trebuie să scadă
tru ca suma lor să rămînă constantă. Presiunea sta
scădea sub presiunea atmosferică, astfel apare fenomen
pe care se bazează unele aplicații practice, cum ar fi p

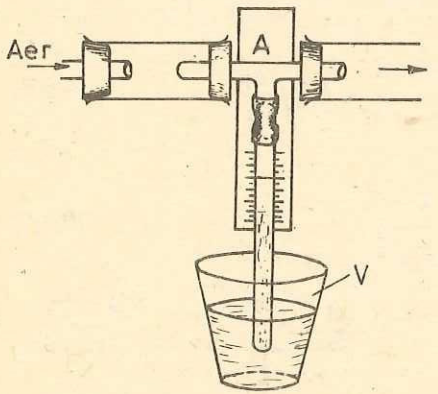


Fig. 9.33. Presiunea statică în porțiunea îngustă A a unei conducte poate să scadă sub valoarea presiunii atmosferice și provoacă aspirarea lichidului din vasul V.

Fig. 9.34.
rului suflat
crește presi
unea statică
mosferice.
urcă în tu
curentul de

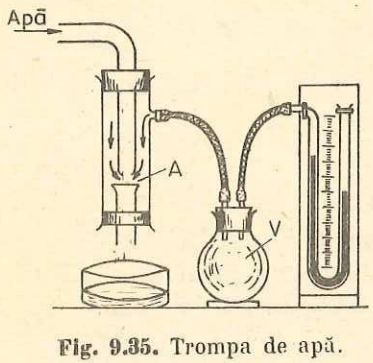


Fig. 9.35. Trompa de apă.

lampa Bunsen, trompa de apă, sonda de presiune, debitmetrele etc.

a) *Trompa de apă* (fig. 9.35) funcționează astfel: în regiunea A presiunea dinamică crește, scade presiunea statică și ia naștere absorbția aerului din vasul V, aer care este antrenat de jetul de apă.

b) *Sonda de presiune* este un tub manometric montat perpendicular pe o conductă prin care curge un fluid și care servește la determinarea presiunii statice a fluidului (fig. 9.36).

c) *Tubul Venturi* se folosește la măsurarea debitelor de volum ale fluidelor (fig. 9.37). Pentru măsurarea debitelor se înlocuiește o porțiune orizontală de conductă cu tubul Venturi cu secțiunea de intrare S_1 și secțiunea porțiunii mai înguste S_2. În secțiunile S_1 și S_2 vitezele fluidului sînt v_1 și v_2. Aplicînd relația (9.20), se obține

$$p_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{v_2^2}{2},$$

de unde

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)\rho. \tag{9.21}$$

Folosind în relația (9.21) ecuația de continuitate (9.15), obținem:

$$\Delta p = \frac{1}{2}\rho\left[\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 - 1\right]v_1^2.$$

Debitul de volum este dat de relația:

$$Q_V = S_1 v_1 = S_1\sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho[(S_1/S_2)^2 - 1]}} = k\sqrt{\frac{\Delta p}{\rho}} \tag{9.22}$$

unde k este constanta aparatului

$$k = S_1 S_2\sqrt{\frac{2}{S_1^2 - S_2^2}}. \tag{9.23}$$

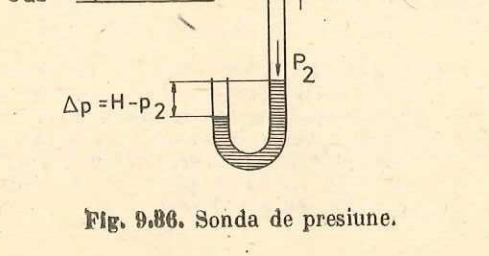


Fig. 9.36. Sonda de presiune.

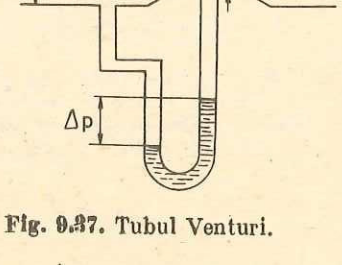


Fig. 9.37. Tubul Venturi.

9.4.5. **Viscozitatea.** La viteze nu prea mari, curgerea fluidelor este laminară (în straturi), adică liniile de curent sînt bine determinate și nu se intersectează nicăieri între ele, fiecare particulă de fluid rămîne mereu în interiorul unui același tub de curent. La viteze mari, mișcarea devine turbulentă, neregulată, porțiunile de fluid se amestecă și se formează vîrtejuri.

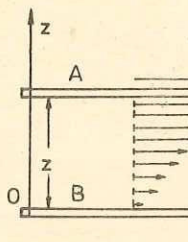


Fig. 9.38. Antrena
cine da

Să ne imaginăm două suprafețe solide plane A și B una de alta într-un fluid vîscos în repaus (fig. 9.38). Acți prafeței A deplasînd-o cu o viteză $\vec{v}$ constantă în rapo suprafața A se deplasează în propriul său plan, suprafa seze în aceeași direcție. Ne putem închipui că în interiorul două suprafețe plane există mai multe straturi paralele ca între care apar forțe de frecare internă sau de viscozitate. cu suprafața mobilă are aceeași viteză ca și aceasta, în cealaltă suprafață se află în repaus. Viteza straturilor in la o suprafață la alta, așa cum arată figura 9.38. Stratul accelerеze stratul cu viteză mai mică peste care el alunecă, mică caută să frîneze stratul cu viteză mai mare cu care e tere forța de frecare $\vec{F'} = -\vec{F}$, care acționează în pla viteză de curgere variază de la un strat la altul.

Dacă grosimea z a stratului de fluid dintre cele do aceeași forță $\vec{F}$ suprafeței A, aceasta va căpăta o viteză mărește aria S a suprafeței A se constată o micșorare a vit de aceeași forță: $v \sim 1/S$. O creștere a modulului forței ională a vitezei v : $v \sim F$. Astfel viteza este proporțion și cu $1/S$. Putem scrie următoarea relație:

$$v = \frac{Fz}{\eta S},$$

sau

$$\eta = \frac{Fz}{Sv},$$

unde η este un factor care depinde numai de natura fluidul se numește coeficientul de viscozitate al fluidului.

Unitatea de măsură pentru coeficientul de viscozitat după numele fizicianului Poiseuille.

Avînd în vedere relația (9.24) obținem:

$$1 \text{ decapoise} = 1 \text{ N} \cdot \text{s/m}^2$$

9.4.6. **Forța de rezistență la înaintarea în fluide.** Din motocicliști, sau ca pasageri în diverse vehicule, am consta mișcării corpurilor.

Mișcarea unui corp într-un fluid face să apară o *forț* deauna opusă mișcării.

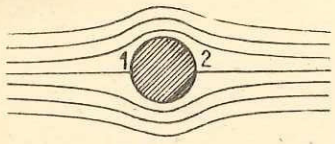


Fig. 9.39. Liniile de curent în jurul unei sfere într-o curgere laminară.

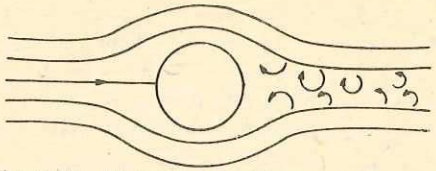
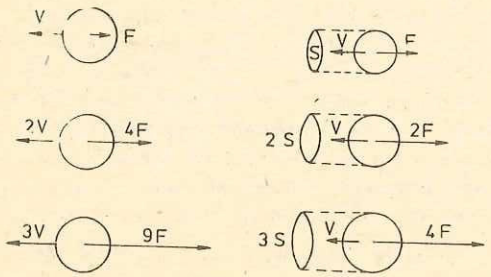


Fig. 9.40. Formarea turbioanelor în spatele unui cilindru de revoluție într-o curgere laminară.

Să considerăm cazul unui corp care posedă o axă de simetrie și care se deplasează în aer cu o viteză constantă care are aceeași direcție ca și axa de simetrie a corpului. Rezistența pe care o opune aerul mișcării corpului se datorează forțelor de frecare și forțelor de presiune. Distingem cazurile următoare:

a) Dacă mobilul se deplasează în aer cu o viteză pînă la 0,5 m/s, perturbațiile datorate forțelor de presiune sînt neglijabile. Mișcarea este perturbată de forțele de frecare.



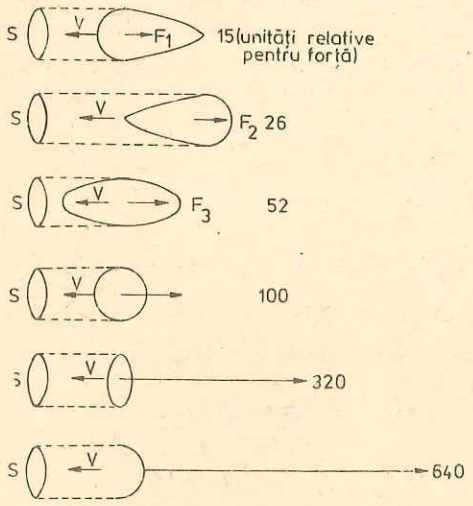


Fig. 9.41. Forța de rezistență a obiectelor aflate într-un lichid în mișcare este proporțională cu: *a)* pătratul vitezei fluidului; *b)* cu secțiunea transversală S a corpului. Depinde, de asemenea, de forma corpului (*c*) și de densitatea fluidului.

Forțele de frecare se datorează viscozității aerului. Acestea sînt tangente la suprafața corpului și admit o rezultantă care are ca dreaptă suport, axa de simetrie a mobilului, numită *rezistență de frecare*. În acest caz, rezistența este proporțională cu viteza. Fluidul alunecă în lungul pereților corpului și curgerea lui se numește *laminară* (fig. 9.39).

b) Dacă mobilul se deplasează cu o viteză cuprinsă între 1 m/s și 280 m/s, rezistența de frecare (datorată viscozității aerului) este mică în raport cu rezistența datorată forțelor de presiune. La aceste viteze, se produce în fața mobilului o zonă de suprapresiune și în spatele mobilului o zonă de depresiune, care dă naștere turbioanelor (fig. 9.40). În acest caz rezistența se datorează diferenței dintre forțele de presiune din fața și din spatele mobilului.

Studii experimentale, în tunele aerodinamice, au condus la concluzia că rezistența de înaintare în aer este proporțională cu:

— pătratul vitezei mobilului (fig. 9.41, *a*);

— densitatea aerului ρ, în condițiile experimentului;

— aria S a suprafeței obținută prin proiectarea corpului pe un plan perpendicular pe vectorul viteză, numită contur aparent (fig. 9.41, *b*).

Rezistența mai depinde de forma corpului.

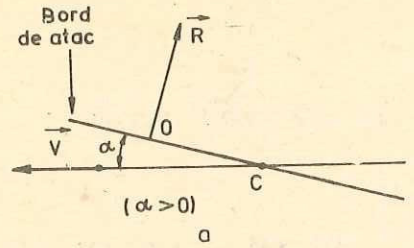


Fig. 9.42. *a)* Unghiul de atac al unei plăci plane
unei plăci plane.

Mărimea forței de rezistență este dată de relația urm

$$F = \frac{1}{2} CS\rho v^2.$$

Factorul 1/2 este introdus din considerente teoretice. Coe
este o constantă adimensională. Acest coeficient depin
numește și coeficient de formă în regim turbulent.

9.4.7. **Zborul avionului.** Să considerăm aripa unui a
dreptunghiulare, care se mișcă într-o atmosferă calmă cu
face placa cu vectorul viteză v (fig. 9.42). Unghiul α se nu
tală a plăcii se numește bord de atac, iar partea diametra
(fig. 9.42). Experiența arată că asupra plăcii acționează
o rezultantă R. Aceasta satisface următoarele condiții:

— are punctul de aplicație O, la o treime de bordul
— are direcția normală la placă;
— are un astfel de sens încît tinde să mărească ungh
— intensitatea forței $\vec{R}$ este proporțională cu dens
unghiul de atac și pătratul vitezei:

$$R = C\rho\alpha S v^2.$$

Această formulă este valabilă pentru unghiuri mic
nu depășesc 300 km/h.

Proiectăm forța $\vec{R}$ pe o axă paralelă cu vi-
teza și pe o axă perpendiculară pe viteză (fig. 9.43).

Componenta $P = R \cos \alpha$ se numește *portanța aripei* (sau forță portantă) care învinge greutatea avionului. Componenta $T = R \sin \alpha$ se numește *rezistența frontală* și trebuie învinsă de către forța de tracțiune a avionului.

PROBLEMĂ REZOLVATĂ

Un rezervor cu apă este prevăzut cu un orificiu de s
cu secțiunea S_1 a rezervorului. Orificiul este constru
Să se calculeze viteza de curgere a apei prin orificiu
și *b*). Nivelul apei din rezervor se menține consta
$= 10\ m/s^2$).

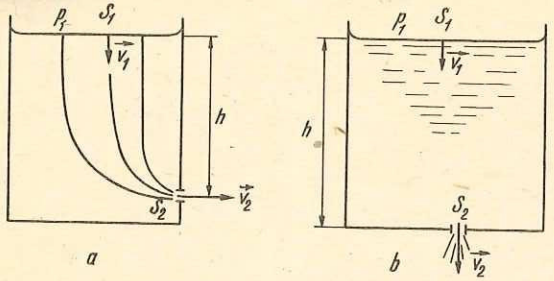


Fig. 9.44. *a* și *b*. La problema rezolvată.

Rezolvare. Notăm cu p_0 presiunea atmosferică, cu v_1 viteza lichidului la nivelul său superior și cu v_2 viteza lichidului la nivelul orificiului. Mișcării fluidului (presupus ideal), i se aplică legea lui Bernoulli:

$$p_0 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h = p_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Ținînd seamă de ecuația de continuitate: $S_1 v_1 = S_2 v_2$, obținem:

$$v_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}}}.$$

Cum secțiunea S_2 este foarte mică în raport cu S_1, avem:

$$v_2 = \sqrt{2gh} = 6 \text{ m/s}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Un balon de cauciuc umflat cu hidrogen urcă în aerul atmosferic. Acest fapt poate fi o probă a existenței forțelor de presiune datorate aerului atmosferic? Justificați răspunsul. **R:** da.

2. Un pahar umplut cu apă pînă la refuz este acoperit cu o foaie de hîrtie. Se întoarce paharul cu gura în jos acoperind în acest timp foaia cu podul palmei. Foaia rămîne lipită de gura paharului și apa nu curge (fig. 9.45). Este aceasta o probă a existenței presiunii atmosferice?

R: da.

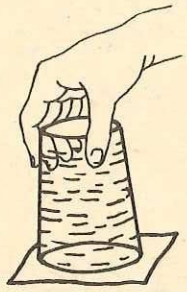


Fig. 9.45. Pentru exercițiul 2.

3. Se cufundă un corp într-un vas cu apă, astfel încît sub corp mai rămîne un strat foarte subțire de apă. Să va exercita, în acest caz, o presiune hidrostatică orientată de jos în sus? Justificați răspunsul.

R: da.

4. Dacă o persoană se așază în apropierea unui tren care se deplasează cu o viteză oarecare, există riscul ca persoana să cadă sub tren?

R: da.

5. Un remorcher trage două șlepuri (fig. 9.46). Explicați de ce cele două șlepuri au tendința să se apropie.

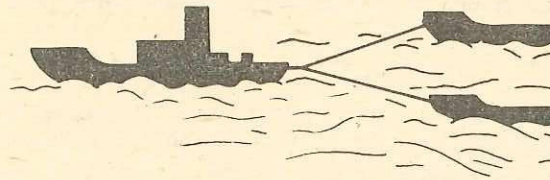


Fig. 9.46. Pentru exercițiul 5.

6. Două mingi de cauciuc se suspendă așa cum se arată în fig. 9.47. Dacă între cele două mingi se suflă aer, acestea se vor apropia. Explicați de ce.

7. Se realizează dispozitivul din figura 9.48 alcătuit din două discuri de carton și așezat în apropierea unui alt disc B prevăzut la mijlocul său cu o tură cu un tub C. Dacă se suflă aer prin tubul C, discurile se apropie. De ce?

8. Un manometru cu lichid se compune dintr-un tub în formă de U, una dintre ramuri fiind deschisă iar cealaltă este legată la un recipient care conține un gaz sub o anumită presiune. Tubul se poate umple cu mercur ($\rho_1 = 13,$ sau cu ulei ($\rho_3 = 0{,}6$ g/cm³). Să se discute avantajele și dezavantajele fiecărui lichid. În ce condiții, fiecare dintre cele trei lichide, va fi preferabil?

9. Un tub Torricelli are o lungime $l = 1$ m. Se înclină pînă când atinge suprafața mercurului. În acest moment el face un unghi $\alpha = 49°10'$ cu verticala și iese parțial din cuvă. Să se determine presiunea atmosferică în acest loc.

R: $H = \rho g$

10. O bucată de lemn cu densitatea $\rho_1 = 700$ kg/m³ și cu masa m_1 este legată de o bucată de plumb. Corpul format se introduce în apă. Să se calculeze greutatea plumbului pentru ca:
a) corpul format să plutească în echilibru în apă;
b) numai $f = 8/10$ din volumul total să fie cufundat în apă.
$\rho_2 = 11\,350$ kg/m³, iar $g = 10$ m/s².

R: $(m_1 + m_2)g = \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}\right) f\rho g$: *a)* f

11. Densitatea apei de mare este de 1,026 g/cm³. Care este presiunea la mare la o adîncime de 1 km?

R:

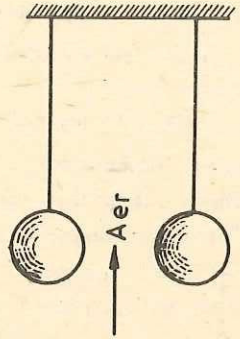


Fig. 9.47. Pentru exercițiul 6.

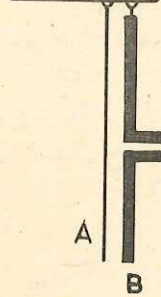


Fig. 9
exe

12. Pistonul mic al unei prese hidraulice are un diametru $d_1 = 1$ cm și este supus acțiunii unei forțe $F_1 = 10$ N. Care trebuie să fie diametrul pistonului mare d_2 pentru a suporta o sarcină $F_2 = 10\,000$ N?

R: $d_2 = d_1\sqrt{F_2/F_1} = 31{,}6$ cm.

13. Un corp din fontă cu masa $m = 20$ kg și densitatea $\rho = 7\,500$ kg/m³ poate să plutească pe suprafața mercurului de densitate $\rho_1 = 13\,600$ kg/m³. Calculați volumul porțiunii din corp cufundate în mercur și volumul total al corpului.

R: $V_i = m/\rho_1 = 1\,470$ cm³; $V = 2\,667$ cm³.

14. O sferă din aluminiu are greutatea în aer $G = 2{,}58$ N. Greutatea sa aparentă în apă nu este decît $G_a = 1$ N. Demonstrați că sfera este goală în interior și calculați volumul cavității. Densitatea aluminiului $\rho = 2\,580$ kg/m³ ($g = 10$ m/s²).

R: $G_a = G - (V_1 + G/\rho g)\cdot\rho_0 g$; $V_1 = 58$ cm³.

15. Masa unui vapor este $m = 57\,800$ tone. Să se calculeze volumul părții cufundate în apă de mare cu densitatea $\rho_1 = 1\,028$ kg/m³, și apoi în apă dulce cu densitatea $\rho_2 = 1\,000$ kg/m³.

R: $V_1 = m/\rho_1 = 56\,226$ m³; $V_2 = m/\rho_2 = 57\,800$ m³

16. Un tub Torricelli este înclinat cu $\alpha = 45°$. Cu cît se deplasează mercurul în tub, cînd presiunea atmosferică variază de la $H_1 = 758$ la $H_2 = 764$ mm coloană de mercur?

R: $\Delta h = (\Delta H)/\rho g \cos\alpha = 8{,}5$ mm.

17. Printr-o conductă orizontală, cu secțiunea transversală variabilă, curge apă (fig. 9.49). Să se determine debitul de volum al apei ce curge prin conductă. Se dau secțiunile transversale $S_1 = 10^{-3}$ m², $S_2 = 2\cdot10^{-3}$ m² și diferența de nivel dintre coloanele de lichid din sondele de presiune montate pe conductă $\Delta h = 0{,}2$m.

R: $Q_V = S_1 S_2\sqrt{2g\,\Delta h/(S_2^2 - S_1^2)} = 2{,}29\cdot10^{-3}$ m³/s.

18. Să se afle cu ce viteză scade nivelul apei dintr-un rezervor cu aria secțiunii transversale $S_1 = 1$ m², dacă viteza de curgere a apei printr-un orificiu, făcut în peretele lateral al rezervorului, este $v = 2$ m/s. Diametrul orificiului este de $d = 2$ cm.

R: $v_1 = \pi d^2 v/4\,S_1 = 6{,}28\cdot10^{-4}$ m/s.

19. Să se determine viteza de curgere a bioxidului de carbon printr-o conductă, dacă prin secțiunea transversală a conductei se scurge în timpul $t = 30$ minute o masă $m = 0{,}51$ kg. Densitatea gazului este $\rho = 7{,}5$ kg/m³ și diametrul conductei este $d = 2$ cm.

R: $v = 4\,m/\rho\,\pi d^2 t = 0{,}12$ m/s

20. Apa se scurge dintr-un tub cu diametrul interior $d = 2$ cm cu debitul de volum $Q_V = 8$ litri/min. Să se determine viteza apei în tub.

R: $v = 4\,Q_V/\pi\,d^2 = 42{,}4$ cm/s.

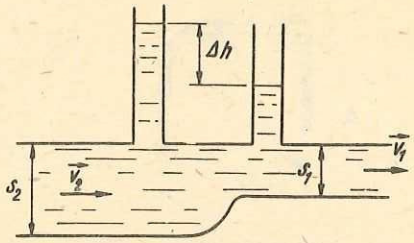


Fig. 9.49. La problema 17.

21. Un lichid cu densitatea $\rho = 900$ kg/m³, curge printr-o conductă cu diametrul $d = 6$ cm. Într-o secțiune unde diametrul scade la $d_1 = 4{,}2$ cm, presiunea este cu 1 600 N/m² mai mică decît presiunea din cealaltă secțiune a conductei. Să se calculeze viteza lichidului în secțiunea conductei de diametru d.

R: $v = \sqrt{(2\,\Delta p)/\rho[(d/d_1)^4 - 1]} = 1{,}1$ m/s.

10

UNDE ELASTICE. NOȚIUNI DE

10.1 OSCILATORUL LINIAR ARMONIC. COM

10.1.1. Mișcarea oscilatorie

EXPERIMENTE

1. De un fir lung și inextensibil, suspendăm un c astfel încît să nu-i imprimăm o deviație prea mare f (fig. 10.1, *a*). Un astfel de sistem mecanic este nu

2. De un resort de oțel, suspendăm un corp și pri resortul în jos (fig. 10.1, *b*). Sistemul începe să se m astfel de sistem este numit *pendul elastic.*

3. Fixăm o bandă de oțel la unul din capete și a inițială ca în figura 10.1, *c*. Sistemul se numește *pen*

4. Turnăm apă într-un tub îndoit, din sticlă, cu Astupăm unul dintre capete cu un dop de plută și suf În acest fel coloana de apă este pusă în mișcare (fig

5. Pe marginea unui disc fixăm într-o poziție oare cu viteză unghiulară constantă. Cu ajutorul unei lămp pe un ecran mișcarea bilei de pe disc (fig. 10.1, *e*). bilei are o mișcare alternativă, dus-întors.

În toate cazurile studiate mai sus are loc o mișc și de alta (dus-întors) a poziției inițiale (de repaus) a sale în cazul experimentului 5).

Această mișcare prezintă următoarele caracte

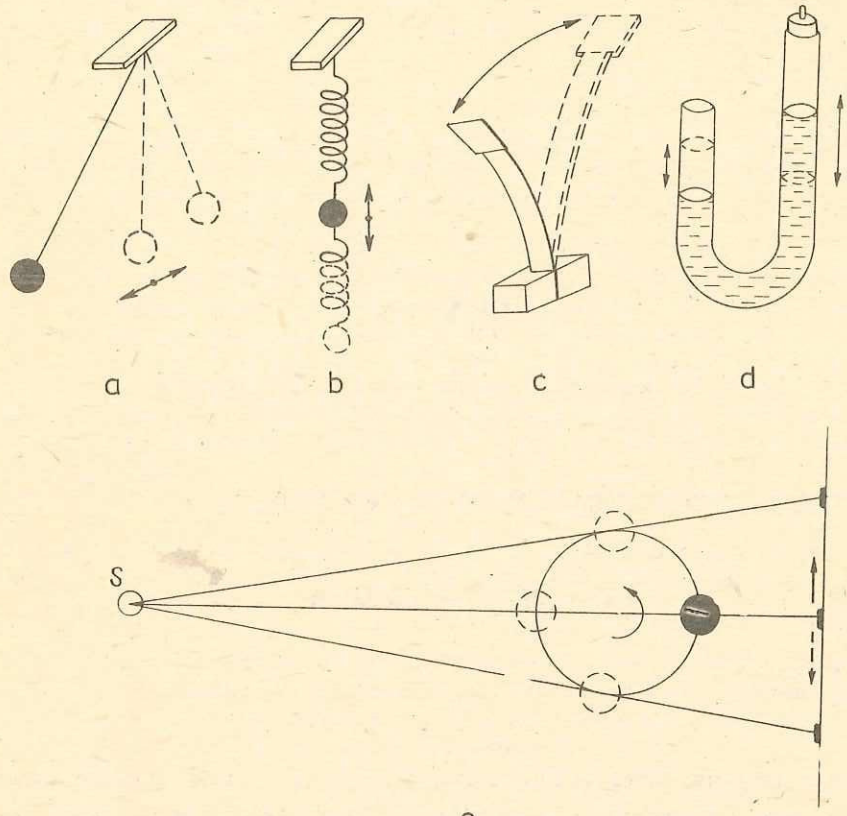


Fig. 10.1. Exemple de oscilatori: *a)* pendul gravitațional; *b)* pendul elastic; *c)* pendul cu arc lamelar; *d)* coloană de apă oscilantă; *e)* proiecția pe un ecran a unei mișcări circulare uniforme.

a) după intervale de timp egale, procesul individual de mișcare, se repetă, este un proces periodic;

b) mișcarea are loc de fiecare dată simetric față de o anumită poziție, poziția de repaus sau de echilibru a oscilatorului.

Mișcarea unui corp sau a unui sistem material, care se repetă la intervale de timp egale și care se face simetric față de o poziție de repaus se numește mișcare oscilatorie sau oscilație mecanică.

Pentru studiul mișcării oscilatorii se definesc următoarele mărimi fizice:

Perioada mișcării oscilatorii T, reprezintă timpul necesar efectuării unei oscilații complete.

Dacă notăm cu n numărul de oscilații efectuate de un oscilator în intervalul de timp t atunci avem:

$$T = \frac{t}{n}.$$

Unitatea de măsură în S.I. este:

$$[T]_{SI} = 1\text{s}.$$

Frecvența mișcării ν *este numărul de oscilații efec*

$$\nu = \frac{n}{t}.$$

Unitatea de măsură pentru frecvență în S.I. este h

$$[\nu]_{SI} = 1\ \text{s}^{-1} = 1\ \text{Hz}.$$

Din relațiile de definiție ale frecvenței și perio

$$\nu T = 1.$$

Elongația mișcării notată cu x sau y reprezint oscilatorului față de poziția de repaus la un momen

Din definiția elongației rezultă că ea variază în o valoare, o direcție și un sens, deci poate fi repr $\vec{x}$ sau $\vec{y}$. În S.I. unitatea de măsură pentru elongaț

$$[x]_{SI} = 1\ \text{m}.$$

Amplitudinea mișcării A *este elongația maximă oscilatorul în cursul oscilației.*

Dacă în experimentele anterioare 1, 2, 3, 4, rile) să oscileze un interval de timp mai mare, se mișcării oscilatorii nu rămîne constantă în timp. amplitudinea mișcării (a proiecției mișcării) rămîne deci două cazuri:

a) *mișcarea oscilatorie (oscilația) este neamortiz* neschimbată de la o oscilație la alta;

b) *mișcarea oscilatorie (oscilația) este amortizat* la o oscilație la alta.

10.1.2. **Oscilatorul liniar armonic.** Să analizăm lungimea l în stare nedeformată (fig. 10.2, *a*). După rea unui resort elastic este proporțională cu forța care acționează asupra resortului. Forța elastică care ia naștere în resort este, de asemenea, proporțională cu deformarea resortului dar de sens opus acesteia. Avem, deci:

$$\vec{F}_e = -k\vec{y} \quad \text{sau} \quad F_e = -ky,$$

unde sînt considerate pozitive valorile citite începînd de la punctul cel mai de jos al resortului netensionat, în jos.

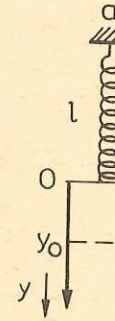


Fig. 10.2

Dacă se suspendă de resort un corp cu masa m, el se va alungi cu y_0 datorită forței $\vec{G} = m\vec{g}$ (fig. 10.2, *b*) și de aici rezultă:

$$\vec{G} = m\vec{g} = k\vec{y}_0 = -\vec{F}_{e0} \tag{10.1}$$

relație valabilă pentru poziția de repaus a pendulului elastic.

Scoțînd pendulul din poziția de repaus el începe să oscileze vertical, forța $\vec{G}$ îndreptată în jos își păstrează valoarea, în timp ce forța elastică $\vec{F}_e$ din resort variază în funcție de alungirea y a acestuia (fig. 10.2, *c,d*). Suma vectorială a celor două forțe sau diferența valorilor lor dă ca rezultantă forța care la orice moment tinde să aducă pendulul spre poziția de repaus. Se obține pentru această forță expresia :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{G} = -k\vec{y} + k\vec{y}_0 = -k(\vec{y} - \vec{y}_0)$$

sau

$$F = -k(y - y_0). \tag{10.2}$$

Așadar forța care acționează asupra pendulului elastic în timpul oscilației este proporțională cu deplasarea (depărtarea) față de poziția de repaus, și de sens contrar acesteia adică este o forță de tip elastic.

Un punct material care se mișcă rectiliniu sub acțiunea unei forțe de forma $F = -ky$ (sau $F = -kx$) se numește oscilator liniar armonic. Mișcarea sa de oscilație este numită mișcare oscilatorie armonică.

Oscilatorul liniar armonic este un oscilator ideal.

Pentru a stabili legea mișcării oscilatorului armonic, dependența elongației y de timp, $y = y(t)$, ne vom folosi de mișcarea circulară uniformă a unui punct material și de proiecția acestei mișcări pe unul din diametrele traiectoriei.

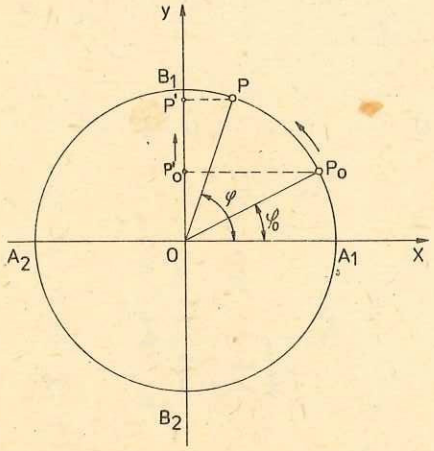


Fig. 10.3. Proiecția ortogonală a mișcării circulare uniforme a punctului P pe unul

Să urmărim, în același timp, mișcarea circulară uniformă cu viteza unghiulară ω, pe un cerc de rază $R = A$, a unui punct material P de masă m și mișcarea proiecției sale P', proiecție ortogonală pe axa Oy (diametrul B_1B_2, în figura 10.3). În timp ce P face o rotație completă plecînd din A_1 în sensul indicat pe figură, proiecția sa P' efectuează o oscilație cu amplitudine constantă A, plecînd din O așa cum arată figura 10.4. Se observă următoarele: compo-

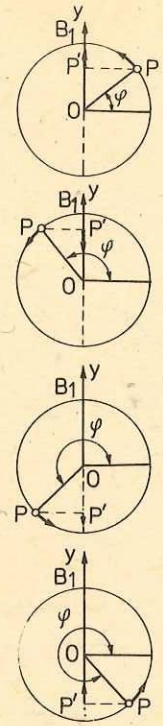
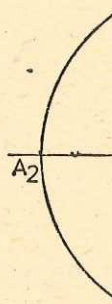


Fig. 10.4. Mișcarea co
proi

Fig
pun
pro
c



nenta pe axa y a deplasării lui P este totdeauna a
componenta pe axa y a vitezei lui P este totdeaun
componenta pe axa y a accelerației lui P este to
rația lui P'. Deci mișcarea oscilatorie a punctu
proiecția pe diametrul Oy a mișcării circulare un
arătăm că această mișcare oscilatorie este o mișca

Se știe că în mișcarea circulară uniformă acc
valoarea $\omega^2 R$. Componenta sa pe diametrul B_1B_2
lerația mișcării punctului P' și are valoarea :

$$a = -\omega^2 R \sin \varphi.$$

Din figura 10.5 se observă că putem scrie:

$$y = R \sin \varphi.$$

În acest caz relația (10.3) devine:

$$a = -\omega^2 y \quad \text{sau} \quad \vec{a} = -\omega$$

unde semnul minus semnifică faptul că accelerația
opuse.

Punctul P' se mișcă la fel ca și cînd ar fi un
și asupra lui ar acționa o forță F care să-i imprime

Deci:

$$F = ma = -m\omega^2 y. \tag{10.6}$$

Pentru valori determinate ale masei m și ale vitezei unghiulare constante ω, produsul $m\omega^2 = k$ și relația (10.6) devine:

$$F = -ky. \tag{10.6'}$$

Așadar mișcarea punctului P' se face ca și în cazul în care forța sub acțiunea căreia are loc mișcarea este o forță de tip elastic și deci acest punct material descrie o mișcare oscilatorie armonică.

Știind că $\varphi = \omega t$ și că $R = A$ este amplitudinea mișcării oscilatorii, relația (10.4) devine:

$$y = A \sin \omega t. \tag{10.7}$$

Această relație reprezintă ecuația elongației oscilatorului liniar armonic, adică reprezintă legea de mișcare a oscilatorului, dependența $y = y(t)$.

Dacă proiecția mișcării punctului P se face pe diametrul A_1A_2 atunci se obține pentru ecuația elongației expresia:

$$x = A \cos \omega t.$$

Putem formula acum o altă definiție a mișcării oscilatorii armonice:

orice punct material care se mișcă rectiliniu, față de un SR, astfel încît legea de mișcare este de forma

$$y = A \sin \omega t \text{ sau } x = A \cos \omega t,$$

descrie o mișcare oscilatorie armonică.

Ținînd seama de relația (10.7) și de relația (10.5) expresia accelerației devine acum:

$$a = -\omega^2 A \sin \omega t. \tag{10.5'}$$

Componenta vitezei liniare $v_t = \omega A$, pe diametrul B_1B_2 reprezintă viteza de mișcare a lui P', adică viteza mișcării oscilatorii armonice:

$$v = \omega A \cos \omega t. \tag{10.8}$$

Faza și perioada mișcării oscilatorii armonice. Argumentul funcției $y = A \sin \omega t$, $\varphi = \omega t$, se numește faza mișcării oscilatorii. Faza se măsoară în radiani și este una dintre mărimile de stare ale oscilatorului. Dacă în figura 10.3 oscilatorul P' ar fi fost la momentul inițial în P_0' (corespunzător punctului P_0 de pe cerc) faza la momentul $t_0 = 0$ ar fi fost φ_0. Atunci, la momentul t faza este $\varphi = \varphi_0 + \omega t$. Ecuația elongației se va scrie în acest caz:

$$y = A \sin (\omega t + \varphi_0). \tag{10.9}$$

Pentru mișcarea oscilatorie mărimea ω se numește pulsație și reprezintă viteza de variație a fazei. Această mărime se măsoară în S.I. în rad/s.

Ca și la mișcarea circulară, între frecvența ν, perioada T și pulsația ω, mărimi caracteristice mișcării oscilatorii, sînt valabile relațiile:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad \omega = 2\pi\nu. \tag{10.10}$$

Din relația $k = m\omega^2$ ținînd seama de relația $k = m \cdot 4\pi^2/T^2$ de unde rezultă:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Această relație reprezintă perioada oscilatorului
că perioada unui oscilator depinde de proprietățile
m, și de cele elastice, prin constanta elastică k și
inițiale în care se află oscilatorul.

EXPERIMENT

Cu un montaj ca cel din figura 3.65 se pot face
și frecvenței unui pendul elastic, evident neglijînd
aerul. Se pune în oscilație pendulul, trăgîndu-l ușor
liber. Se numără oscilațiile n efectuate într-un inter
difică masa pendulului m prin adăugarea de discur
Se pune din nou pendulul în stare de oscilație
efectuate într-un timp determinat. Datele obținute
forma celui de mai jos:

Dinamometrul 1 N							Di	
Nr. crt.	n Nr. de oscilații	t (s)	m (kg)	T (s)	T_{mediu} (s)	k N/m	Nr. crt.	t (s)

Cu datele obținute studiați dependențele $T =$
Ați putea indica eventualele surse de erori? Ce ar tr
precizia determinărilor?

10.1.3. **Energia oscilatorului armonic.** După cum
de masă m, sub acțiunea unei forțe elastice $F =$
oscilatorie armonică. La un moment dat t, elongați
viteza mișcării $v = \omega A \cos \omega t$ (considerînd $\varphi_0 = 0$).

Cum energia de poziție în cîmpul forțelor elastice
oscilatorul liniar armonic avem:

$$E_p = \frac{1}{2} ky^2 = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2 \omega t,$$

iar pentru energia cinetică a oscilatorului:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \omega t = \frac{1}{2} kA$$

(pentru că $m\omega^2 = k$).

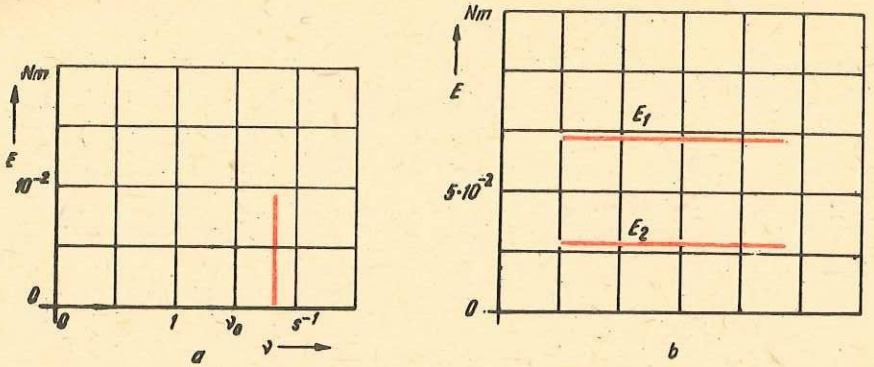


Fig. 10.6. *a)* Spectrul unei oscilaţii; *b)* schema nivelelor de energie a două oscilaţii.

Energia mecanică totală a oscilatorului liniar armonic este:

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} kA^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = 2\pi^2 \nu^2 A^2 m. \tag{10.14}$$

Din relaţia 10.14 deducem că *energia totală a oscilatorului liniar armonic este constantă în timp* — este un invariant.

Se folosesc două moduri de reprezentare a energiei unui oscilator:

a) se reprezintă grafic energia în funcţie de frecvenţă (energia pe ordonată şi frecvenţa pe abscisă). Se obţine astfel un *spectru* al procesului respectiv. O oscilaţie armonică se reprezintă printr-o *linie spectrală* (fig. 10.6, *a*);

b) printr-o *schemă de nivele de energie.* Într-o schemă de nivele de energie, energia oscilatorului se reprezintă printr-o dreaptă orizontală situată la o înălţime corespunzătoare valorii energiei (fig. 10.6, *b*). Se spune că oscilatorul se află pe un anumit *nivel de energie.*

PROBLEME REZOLVATE

1. Un corp de masă m fixat de un resort de constantă k este deplasat cu distanţa x_0 faţă de poziţia de echilibru sub acţiunea unei forţe F. Lăsat apoi liber, corpul începe să oscileze armonic (fig. 10.7). Se cer: *a)* constanta elastică a resortului presupunînd valorile lui F şi x_0 cunoscute; *b)* perioada oscilaţiilor; *c)* viteza maximă atinsă de corp. (Se neglijează frecările.)

Rezolvare. a) Alungirea resortului pe distanţa x_0 este produsă de forţa F. Deci $k = F/x_0$.

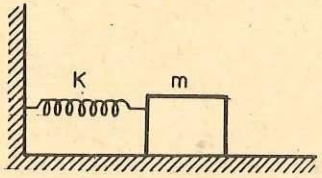
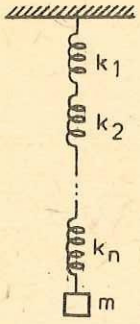


Fig. 10.7. Pentru problema rezolvată 1.

b) Din $k = m\omega^2$ obţinem $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ şi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

c) Viteza oscilatorului este dată de relaţia $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$ şi este maximă cînd $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ deci $v_{max} = A\omega$ unde $A = x_0$ şi $\omega = \sqrt{k/m}$ şi deci $v_{max} = x_0 \sqrt{k/m}$.



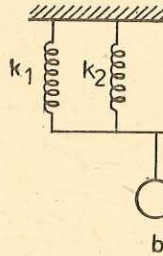


Fig. 10.8. Pentru problema rezolva

2. Să se calculeze perioada de oscilaţie a unui corp de ma mediul mai multor resorturi de constante $k_1, k_2, \ldots k_n$, paralel.

Rezolvare: a) Forţa elastică care acţionează asupra între

$$F = k_{es} \cdot x$$

unde k_{es} este constanta echivalentă a resorturilor legate în ra 10.8, *a*, că fiecare resort va avea o deplasare proprie x sărilor va fi tocmai deplasarea întregului sistem de resort

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x.$$

Dar (neglijînd masele resorturilor) avem:

$$x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}, \quad \ldots x_n = \frac{F}{k_n} \text{ şi } x$$

şi înlocuind în relaţia deplasărilor obţinem:

$$\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \ldots + \frac{F}{k_n} = \frac{F}{k_{es}}.$$

După simplificare obţinem:

$$\frac{1}{k_{es}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_n} = \sum_{i=1}^{n}$$

Ştiind că $m\omega^2 = k_{es}$, rezultă:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{es}}{m}} \text{ şi } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_{es}}} = 2\pi$$

b) În acest caz din figura 10.8, *b* se vede că forţa rezultan

$$F = F_1 + F_2 + \ldots + F_n.$$

Resorturile avînd fiecare aceeaşi deplasare x. Deci vom a

$$F = k_{ep}x; \; F_1 = k_1 x; \; F_2 = k_2 x, \ldots, F_n =$$

Şi înlocuind în expresia forţei F obţinem:

$$k_{ep}x = k_1 x + k_2 x + \ldots + k_n x \text{ şi}$$

$$k_{ep}\, x = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)x; \text{ după simplificar}$$

$$k_{ep} = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = \sum_{i+1}^{n} k_i.$$

Din $k_{ep} = m\omega^2$ avem:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{ep}}{m}} \text{ și } T = \frac{2\pi}{\omega}. \text{ Deci } T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{ep}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\sum_{i=1}^{n} k_i}}.$$

10.1.4. **Compunerea oscilațiilor.** Am văzut că sub acțiunea unei forțe de tip elastic un punct material descrie o mișcare oscilatorie armonică a cărei ecuație este de forma:

$$x = a\cos(\omega t + \varphi) \text{ sau } y = a\sin(\omega t + \varphi)^*.$$

Ce se va întîmpla atunci cînd un punct material va fi solicitat să descrie în același timp două mișcări oscilatorii armonice? Ce fel de mișcare va avea în această situație punctul material?

Vom considera cazul în care cele două oscilații care solicită punctul material au aceeași direcție și aceeași pulsație (perioadă) dar amplitudinile și fazele inițiale diferite:

$$y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1) \qquad (10.15)$$
$$y_2 = a_2\sin(\omega t + \varphi_2).$$

Deplasarea y față de poziția de echilibru va fi dată de suma algebrică a deplasărilor y_1 și y_2 adică:

$$y_1 + y_2 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1) + a_2\sin(\omega t + \varphi_2). \qquad (10.16)$$

Să efectuăm această adunare cu ajutorul metodei fazorilor sau vectorilor rotitori.

Dacă vom considera un segment de dreaptă de lungime a_1 (fig. 10.9) care face cu axa Ox unghiul φ_1, drept un vector cu originea în O și sensul de la O la A, adică vectorul $\vec{a}_1 = \overrightarrow{OA}$ și dacă acest vector se va roti cu viteza unghiulară ω (constantă) în sens trigonometric, atunci proiecția sa pe axa Oy la un moment oarecare t va fi:

$$y_1 = a_1\sin(\omega t + \varphi_1),$$

relație care reprezintă tocmai ecuația unei mișcări oscilatorii armonice.

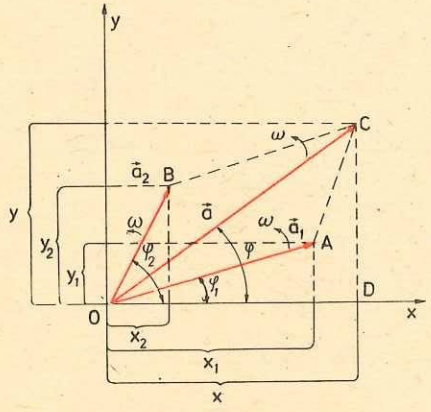


Fig. 10.9. Compunerea vectorilor rotitori care reprezintă mișcări oscilatorii armonice de aceeași pulsație.

Așadar, putem reprezenta grafic prin vectori rotitori, fazori, o mișcare oscilatorie armonică.

Deci cele două mișcări oscilatorii descrise de ecuațiile (10.15) pot fi reprezentate prin fazorii $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$ care se rotesc

* Aici am notat amplitudinea cu litera a pentru a nu o confunda cu litera A din figura 10.9.

cu viteză unghiulară constantă ω, față de punctul
$\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$ rămîne neschimbat și are valoarea $\varphi_2 - \varphi_1$.

Deoarece suma proiecțiilor a doi vectori pe o
pe aceeași axă a vectorului rezultant înseamnă că o
reprezentată prin vectorul rezultant $\vec{a}$, care se ob

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}.$$

Din figura 10.9 avem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_2 -$$

și evident, vectorul rezultant $\vec{a}$ se rotește cu aceea
și vectorii $\vec{a}_1$ și $\vec{a}_2$.

Tot din figura 10.9 obținem și relația:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2} = \frac{}{}$$

relație din care se poate determina unghiul φ, faza
tante.

Oscilația rezultantă va fi dată de componenta
adică va fi de forma:

$$y = y_1 + y_2 = a\sin(\omega t +$$

Așadar, mișcarea rezultantă este o mișcare osc
aceeași direcție ca oscilațiile y_1 și y_2 și aceeași puls
faza inițială φ ale oscilației rezultante se determină
și de fazele inițiale ale oscilațiilor componente, după

De reținut că, potrivit relației (10.18) amplitu
depinde de diferența de fază $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ a oscila
pun.

a) Dacă $\Delta\varphi = 2k\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ atunci

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \text{ sau } a =$$

*Amplitudinea oscilației rezultante este egală cu s
țiilor componente* a_1 *și* a_2. *În acest caz se spune că osci*

b) Dacă $\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ atu
obținem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2, \quad a = |a_1$$

pentru că amplitudinea nu poate fi decît o mărime

*Amplitudinea oscilației rezultante este egală cu
rența amplitudinilor oscilațiilor componente,* a_1 *și* a_2
oscilațiile sînt în opoziție de fază.

c) Dacă $\Delta\varphi = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ atunci $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$ şi obţinem:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2$$

se spune că *oscilaţiile sînt în cvadratură sau „la sfert"*.

10.1.5. **Oscilaţii amortizate.** La studiul mişcării punctului material sub acţiunea unei forţe elastice, am presupus că nici o altă forţă nu mai acţionează asupra lui. În realitate, orice oscilaţie a unui punct material care nu este întreţinută din exterior, se amortizează; amplitudinea oscilaţiei scade cu timpul (fig. 10.10).

Cauzele amortizării sînt forţele care frînează mişcarea, de exemplu forţa de frecare în locul de suspensie la oscilaţia pendulului sau forţa de rezistenţă a mediului. În cazul unor rezistenţe mari ale mediului mişcarea devine aperiodică (fig. 10.11).

Teoretic, oscilaţiile unui punct (sistem) material ar trebui să înceteze complet numai după un interval de timp foarte mare — infinit. În realitate oscilaţiile încetează după un interval de timp relativ scurt deoarece în situaţia în care amplitudinea oscilaţiei ajunge sub o anumită valoare (de exemplu, de ordinul dimensiunilor moleculare) mişcarea sistemului material, luat ca întreg, devine imposibilă.

Energia transmisă unui sistem oscilant, în cazul amortizărilor, este cheltuită treptat sub formă de lucru mecanic necesar învingerii forţei de frecare. Pentru a întreţine oscilaţiile adică pentru a obţine oscilaţii neamortizate trebuie ca sistemul oscilant să primească mereu energie din afară.

Un sistem material în care amplitudinea oscilaţiei este menţinută neschimbată, datorită unei surse energetice care face parte din sistem se numeşte sistem autooscilant. (Un exemplu de astfel de sistem este ceasornicul cu pendul.)

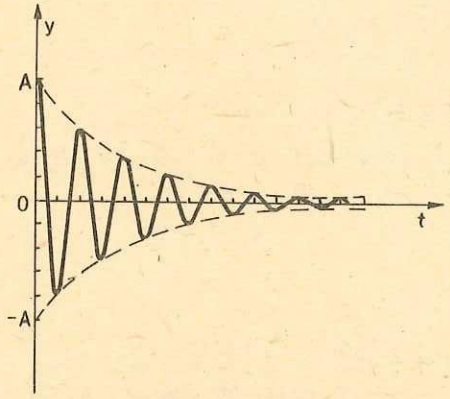


Fig. 10.10. Oscilaţii amortizate. Valoarea amplitudinii scade în timp.

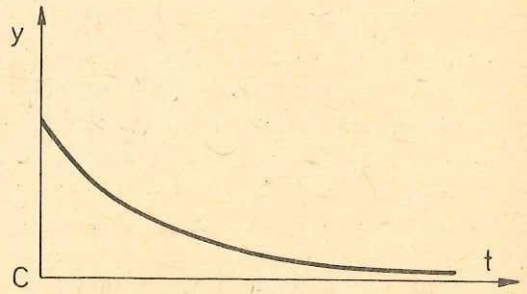


Fig. 10.11. Mişcare aperiodică.

10.2.1. **Pendulul gravitaţional.** Un pendul gravi
lizat (experimentul 1 de la pag. 255) redus la un p
suspendat de un fir inextensibil şi de masă neglijab
plasat din poziţia sa de echilibru şi este lăsat libe
vertical datorită forţei de greutate. În figura 10.1
dul de lungime l, masă m, care formează cu ver
elongaţie unghiulară. Forţele care acţionează asup
de greutate şi $\vec{T}$ tensiunea din fir. Componenta lu
$G_n = mg \cos\theta$ iar componenta tangenţială G_t =
tangenţială este forţa de restabilire sau de revenir
pendulului spre a-l readuce în poziţie de echilibr
bilire este:

$$F = G_t = mg \sin\theta.$$

Remarcăm că forţa F nu este proporţională
ci cu sin θ. Mişcarea pendulului nu este deci o mi
În acest caz nu se mai poate vorbi de o perioadă
oscilaţii cu amplitudine diferită au perioade diferi
izocrone.

Dacă unghiurile θ sînt mici atunci sin θ este
mat în radiani. Analizînd tabelul următor observă
5° putem scrie că sin $\theta \approx \theta$ în radiani.

Unghiul θ		sin θ
grade	radiani	
0°	0,0000	0,0000
2°	0,0349	0,0349
5°	0,0873	0,0872

Dacă exprimăm unghiul θ în radiani avem $\theta = \frac{x^*}{l}$ şi vom obţine înlocuind sin θ cu θ: $F = -mg\theta = -mg\frac{x}{l} = -\frac{mg}{l}x =$ $= -kx$, unde, semnul minus indică faptul că această forţă este totdeauna de sens opus elongaţiei.

mgc

Fig.
asup

* Am notat cu x distanţa de la poziţia de echilibru, m
în dreapta poziţiei de echilibru şi $x < 0$ în stînga poziţiei

Aşadar pentru unghiuri mici, forţa de revenire spre poziţia de echilibru este aproximativ de tip elastic (forţă cvasielastică) şi mişcarea pendulului gravitaţional poate fi considerată în acet caz o mişcare oscilatorie armonică.

Cum $\frac{mg}{l} = k$, perioada proprie de oscilaţie a pendulului devine:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (10.22)$$

Din relaţia (10.22) reţinem că perioada pendulului gravitaţional este independentă de masa pendulului. Deoarece, pentru unghiuri mici, perioada pendulului gravitaţional este independentă de amplitudine, pendulul este folosit ca indicator de timp.

Pendulul gravitaţional oferă o metodă simplă pentru determinarea valorii acceleraţiei gravitaţionale g, măsurînd cu eroare cît mai mică lungimea l şi perioada proprie T a pendulului.

EXPERIMENT

De un fir lung şi subţire cu lungimea $l = 1$ m, suspendat la un capăt, se atîrnă o mică sferă de plumb (oţel sau bronz) cu un diametru de 2—3 cm. Se scoate pendulul astfel format din poziţia de echilibru, deplasîndu-l faţă de verticală cu un unghi θ care să nu depăşească 5° şi se lasă apoi liber. Sistemul începe să oscileze. Se notează un anumit număr n de oscilaţii şi timpul t corespunzător acestora. Perioada de oscilaţie se determină din relaţia $T = t/n$. Considerînd sistemul bilă — fir un pendul gravitaţional, din expresia perioadei $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ obţinem $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$, relaţie din care putem determina valoarea acceleraţiei gravitaţionale locale. Rezultatele unui număr mare de determinări se trec într-un tabel de forma:

nr. crt.	n oscilaţii	t (s)	$T = t/n$ (s)	T_m (s)	g (m/s²)	g_m (m/s²)

Ce observaţii puteţi face? Coincid rezultatele determinărilor? De ce? Care sînt erorile pe care credeţi că le-aţi făcut? Cum s-ar putea înlătura sau micşora aceste erori?

10.2.2. **Oscilaţii forţate. Transfer de energie între doi oscilatori. Rezonanţă.** Să presupunem că un sistem mecanic E, pe care-l vom numi excitator, care efectuează oscilaţii armonice de perioadă T şi amplitudine constantă, exercită o acţiune asupra unui alt oscilator mecani de oscilaţie T_0, pe care-l numim rezonator. Experie are totdeauna o mişcare armonică cu perioada T p torul E. Se spune că rezonatorul efectuează oscilaţ cele ale excitatorului. Acţiunea mecanică exercitată zonatorului se numeşte *cuplaj*.

EXPERIMENT

a) Două pendule simple (fig. 10.13), unul masi pendate prin fire rigide, cu amortizare mică, sînt leg diul unui resort de masă neglijabilă care nu este def lele sînt în repaus. Pendulul P_1, fiind pus în mişcare asupra lui P_2 prin intermediul resortului, o forţă car Are loc în aceste condiţii, un transfer de energie de P_2 oscilează cu aceeaşi frecvenţă ca P_1 şi dacă P_1 es P_2 forţa exercitată de P_2, respectiv energia transmisă

b) Aceeaşi experienţă se mai poate realiza sup pendînd două pendule de o coardă bine întinsă (fig. 1 corzii în punctul de suspensie O_1 o forţă care se tra tact O_2 al pendulului P_2 şi care va oscila cu frecvenţa În acest caz amplitudinea de oscilaţie a lui P_2 est cazul analizat înainte. Cuplajul este mai slab. Tra cele două pendule — oscilatori se realizează cu pie

c) Pe o coardă bine întinsă sînt suspendate ma toare dar cu lungimi diferite (fig. 10.15) unele avînd prie inferioară, altele superioară, pendulului excitato stare de oscilaţie, se poate observa că celelalte pend

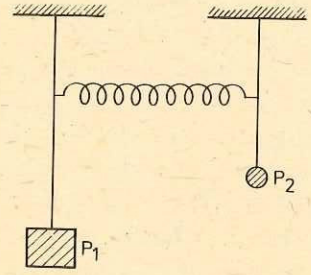


Fig. 10.13. Oscilaţii forţate ale pendulului P_2, cuplaj strîns.

Fig. 10. ale pen

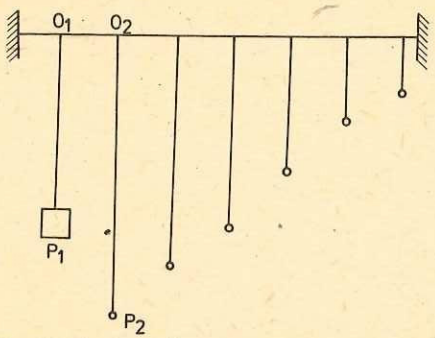


Fig. 10.15. Pendule rezonatoare cu diferite pulsaţii.

datorită transferului de energie prin coardă de la pendulul excitator. De remarcat un fapt interesant şi anume că amplitudinea oscilatorilor este diferită. Ea este cu atît mai mare cu cît perioada proprie de oscilaţie a rezonatorului este mai apropiată, ca valoare, de perioada excitatorului. Dacă unul dintre pendulele rezonatoare are pulsaţia (perioada) proprie de oscilaţie foarte apropiată de cea a excitatorului, atunci amplitudinea sa de oscilaţie, în condiţiile date este cea mai mare, este maximă. Are loc deci un transfer maxim (optim) de energie între cei doi oscilatori.

Transferul energiei de la excitator la sistemul excitat, transfer care se face pentru orice perioadă a excitatorului, este maxim pentru perioadele (pulsaţiile) apropiate de perioada proprie a sistemului excitat. Procesul selectiv de transfer de energie între două sisteme fizice se numeşte rezonanţă.

10.3. PROPAGAREA MIŞCĂRII OSCILATORII

10.3.1. **Propagarea unei perturbaţii.** *a)* Un cablu lung de cauciuc (o coardă, un resort) bine întins, lovit la unul din capete ne permite să observăm transmiterea unei mici deformaţii pînă la celălalt capăt al cablului, după un anumit timp din momentul lovirii.

b) Ne aflăm pe marginea unui bazin cu apă a cărui suprafaţă este netulburată de valuri. Aruncînd o piatră în apă, observăm valuri mici de forma unor cercuri concentrice a căror rază creşte foarte repede. Mai tîrziu vedem aceste mici valuri la distanţe mari faţă de locul în care am aruncat piatra. Perturbaţia provocată prin căderea pietrei pe suprafaţa apei n-a rămas localizată ci s-a transmis pe suprafaţa apei din bazin.

c) Ne aflăm pe un stadion. Asistăm la o întrecere sportivă: cursă cu obstacole, ştafetă etc. S-a dat startul. Vedem mai întîi mica flacără şi fumul produs de pistolul de start şi ceva mai tîrziu auzim şi pocnetul (sunetul) produs de cartuşul percutat.

Iată, în exemplele anterioare, cîteva cazuri particulare ale unei situaţii generale în natură: sistemele materiale nu „răspund" la perturbaţiile exterioare, decît după un anumit timp de la producerea lor. Ştiţi deja că un sistem material este un ansamblu de corpuri (eventual cîmpuri fizice) între care se exercită interacţiuni, forţe. Aceste forţe depind în general de distanţele relative dintre componentele sistemului. Mai mult, chiar, interacţiunile interne scad, uneori foarte repede, cînd distanţele dintre componente cresc. În acest fel, de multe ori, deformaţia sistemului se realizează din aproape în aproape fiecare componentă influenţînd numai pe cele imediat apropiate. Acesta este motivul pentru care „răspunsul" sistemului apare întîrziat faţă de perturbaţia externă aplicată.

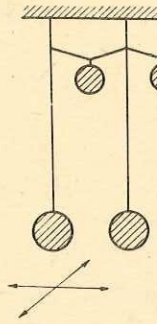


Fig. 10.16. tra

EXPERIMENT

Pe o bară cu lungimea de 1,5—2 m, suspendăm mai multe bile identice cu diametrul de 2,5—3 cm (fig. 10.16). Firele de suspensie au lungimea de 1—1,2 m iar dista de 10—15 cm. Firele de suspensie sînt legate între el sînt atîrnate corpuri identice cu masa de 100 g fie aplicat transversal la unul din capetele lanţului de aproape în aproape pînă la celălalt capăt al lanţul între ele ne permite să observăm că perturbaţia rămîne localizată, nu oscilează numai bila lovită ci aproape în aproape în tot lanţul de bile.

Să considerăm un lanţ de bile (particule), ide aceeaşi masă, legate între ele prin resorturi de ace constantă elastică (fig. 10.17). Lanţul de bile legate mediile reale în care se pot propaga perturbaţii prod există o mare deosebire între lanţul de particule şi me exemplele anterioare. În fizică este folosită metoda fenomenului de studiat, construindu-se sisteme—mod proprietăţile esenţiale ale obiectului sau fenomenu dele se pot obţine rezultate ce aproximează bine rea

În cazurile prezentate la începutul paragrafului propagării sunetului în aer respectiv ale propagării apei şi pe tubul de cauciuc sînt legate de structura aceste perturbaţii (aer, apă, cauciuc). Aceste medii a lară, sînt constituite din atomi sau molecule între legătură care pot fi considerate forţe elastice cu bu

Presupunem că, iniţial, resorturile lanţului sînt

năm din exterior cu o forţă $\vec{F}$ asupra bilei *1* din capă spre dreapta. Să urmărim ce se întîmplă în timpul de pra bilei *2* va începe să acţioneze o forţă F' mai mic

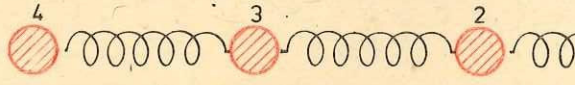


Fig. 10.17. Lanţ de bile şi resorturi, model de

rența dintre tensiunea din resortul *1—2* și cea din resortul *2—3* (aceste tensiuni sînt de sensuri opuse cînd sînt aplicate asupra bilei *2*).

Dacă acceptăm că tensiunea din resortul *1—2* este cel mult egală cu forța externă, rezultă că asupra bilei *2* va acționa mereu o forță mai mică decît asupra bilei *1*. Înseamnă că accelerația bilei *2* va fi mereu mai mică decît cea a bilei *1* și deci, la orice moment intermediar, între aplicarea forței externe și întinderea maximă a resortului *1—2*, bila *2* va avea o depărtare mai mică față de poziția de echilibru decît bila *1*. Considerînd tensiunea din resortul *1—2* ca o forță externă aplicată bilei *2* constatăm că depărtarea de poziția de echilibru a bilei *2* va fi totdeauna mai mare decît cea a bilei *3*. În acest fel, continuînd raționamentul, se poate înțelege de ce fiecare bilă — particulă se depărtează de poziția de echilibru cu o distanță mai mică decît precedenta și mai mare decît următoarea (fig. 10.18).

Considerînd lanțul suficient de lung ajungem la concluzia că trebuie să existe o bilă-particulă în acest lanț, fie n aceasta, care pînă la un anumit moment de la aplicarea forței $\vec{F}$ nu se deplasează din poziția de echilibru. Aceasta înseamnă că tensiunea din resortul n–$(n+1)$ este nulă și deci nici bilele $(n+1)$, $(n+2)$, ... nu se deplasează din pozițiile lor inițiale. Această situație are loc pînă la un anumit moment t. În momentul imediat următor, particula n intră în mișcare și începe să întindă resortul n-$(n+1)$. În acest fel lanțul tinde să repartizeze uniform, răspunsul la forța externă, $\vec{F}$, între toate resorturile sale. Dar, după cum am constatat, acestea nu se întind în același timp și putem ajunge la situația în care forța $\vec{F}$ poate să dispară la un moment dat, și să găsim totuși în lanț resorturi întinse sau comprimate. Mișcarea se transmite, se propagă, astfel din aproape în aproape, de la un capăt la celălalt al lanțului chiar și după încetarea acțiunii externe.

Fenomenul de transmitere a unei perturbații într-un mediu material se numește undă.

Dacă în mediul material perturbat apar numai forțe elastice spunem că unda care ia naștere este o undă elastică.

Mulțimea particulelor-bile din sistem (mediu) care la momentul t nu au fost încă solicitate, dar care vor intra în mișcare în momentul imediat următor constituie ceea ce se numește *frontul undei*.

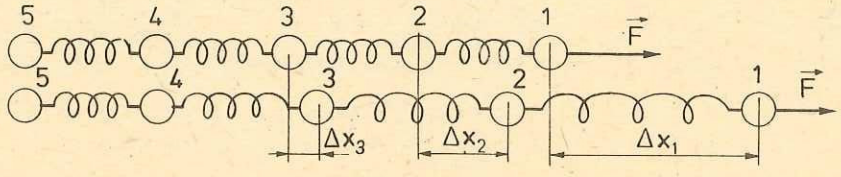


Fig. 10.18. Lanț de bile-resorturi sub acțiunea unei forțe.

10.3.2. **Surse de oscilații. Principiul lui Huygens** ...ului de bile-resorturi. Se poate întîmpla ca la un mo... în poziția de echilibru după un număr oarecare de os... carea ar trebui să înceteze, să se stingă, în lanțul d... nu se întîmplă. În momentul în care bila *1* se află di... libru există o altă bilă, chiar mai multe, care se afl... cea din momentul inițial al bilei *1*. Totul se petrece ... externă ar fi fost aplicată acestei bile și nu primei bil... aceste afirmații au sens dacă frecarea este suficient ... diul de propagare a undei este slab disipativ (pierder... mici). Mai mult, se presupune că forțele interne ca... perturbației sînt numai forțe elastice. (Astfel de ... numesc medii elastice iar undele care apar în astf... elastice.)

„Punctul" în care se aplică perturbația externă s... centru de oscilație, deoarece de cele mai multe ori ... oscilantă și sînt aplicate în regiuni restrînse ale medi... de dimensiunile mediului perturbat.

Constatarea făcută mai sus, în ceea ce privește ... poate fi exprimată astfel:

punctul unde a ajuns unda la un moment dat poa... oscilație în locul celui inițial.

Această propoziție constituie un caz particular a... specifică mediilor elastice, denumită *principiul lui H...*

10.3.3. **Vectorul de oscilație.** Să presupunem că ... mai are loc în lungul lanțului bile-resorturi ci pe o direc... Să considerăm un anumit moment al mișcării t și o a... În acel moment bila n este deplasată față de ...

Să atașăm bilei n un vector $\vec{u}$ care are originea în pozi... mărimea egală cu depărtarea bilei față de poziția iniți... tiv, direcția dată de dreapta care unește cele două pozi... se află bila în momentul considerat. Acest vector se nu... Valoarea sa la un moment dat poartă numele de ... maximă se numește amplitudine. Dacă sînt cunoscu... ai tuturor bilelor la orice moment atunci spunem că ... elastică respectivă.

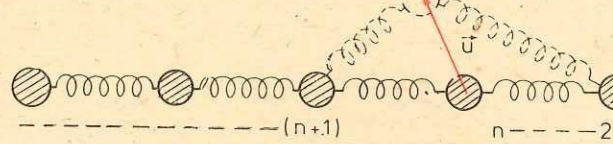


Fig. 10.19. Lanț de bile-resorturi prin care se tra... turbație pe o direcție oarecare.

Observăm că vectorul de oscilație $\vec{u}$ este dependent de timp iar pentru același moment el diferă de la o bilă la alta adică depinde de depărtarea față de poziția de echilibru a fiecărei bile.

Să analizăm un caz real. Vom presupune deci că avem un (corp) mediu prin care se propagă o undă inițiată de o anumită perturbație externă. Ca oricare altul, mediul material considerat este format din microparticule (atomi, molecule). Aceste particule se vor comporta asemenea bilelor din lanțul de resorturi, între ele exercitîndu-se forțe care pot fi asimilate cu tensiunile — forțele elastice, din resort. Sînt însă și deosebiri mari: *a)* în primul rînd particulele unui mediu real formează o structură spațială și nu una liniară ca modelul lanț de resorturi-bile; *b)* în al doilea rînd forțele dintre ele pot să nu fie elastice, adică nu sînt proporționale cu depărtarea față de poziția de echilibru. Aceste deosebiri, cu toate că sînt importante, nu duc la rezultate mult diferite de cele care se obțin cu modelul lanț (liniar) de resorturi-bile.

De precizat că, în cazul real, nu fiecare particulă oscilează separat; se întîmplă,în cazul unor unde,ca grupuri întregi de particule să se miște la fel și deci să joace împreună rolul unei bile-particule din lanț.

10.4. UNDE TRANSVERSALE. UNDE LONGITUDINALE VITEZA DE PROPAGARE

10.4.1. **Tipuri de unde.** Să considerăm, față de un sistem de referință triortogonal *Oxyz*, poziția de echilibru a unui grup de particule din mediu, care se mișcă la fel (fig. 10.20). Grupul de particule care oscilează la fel ocupă un anumit volum pe care-l considerăm mic în raport cu dimensiunile mediului. Fiind foarte mic, este puțin importantă forma acestui volum și de aceea

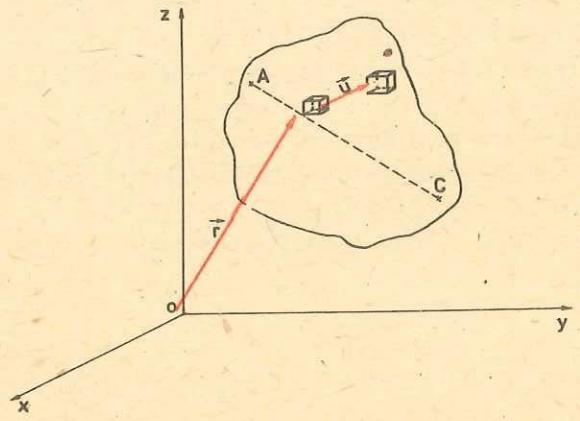


Fig. 10.20. Transmiterea unei perturbații pentru un grup de particule identice. Vectorul $\vec{u}$ este vectorul de oscilație.

îl putem considera de formă paralelipipedică. Poziț

rință *Oxyz* se fixează cu ajutorul vectorului de po
mic paralelipiped.

Sub acțiunea undei, grupul de particule se va
într-altă poziție. Vectorul de oscilație unește centre
așa cum arată și figura 10.20. Mărimea și orientare

timp și de poziția de echilibru a grupului de parti
$= \vec{u}(\vec{r}, t)$. Să considerăm un centru de oscilație C î
bație externă. După un timp ea s-a transmis pînă
se numește direcție de propagare sau rază de undă,
mite, se propagă, în mediul considerat după direcți
din C. Pe o astfel de direcție lucrurile se petrec as
la modelul lanț de resorturi și bile.

Distingem două cazuri particulare importante

a) este posibil ca vectorul de oscilație, variab
pentru orice particulă perpendicular pe direcția d

b) vectorul de oscilație să aibă direcția identic

În primul caz *unda este transversală*, iar în celăl

Din nou trebuie precizat că o undă nu apare înt
între componentele acestuia se exercită interacțiun
sale nu se pot produce decît în medii în care se man
diculare pe direcția de propagare, forțe de forfecare
exemplu fluidele, acestea sînt caracterizate prin pro
particulele constituente nu interacționează prin for
tele care unesc centrele particulelor între ele, ci nu
acestor drepte. Așadar, o deformare de forfecare
fluide pentru că nu există forțe de revenire, forțe ela
ticulele în pozițiile lor inițiale. Prin fluide se pot p
(comprimările) de-a lungul razelor de undă, situați
lație sînt paraleli cu direcția de propagare, adică se
longitudinale.

În (corpurile) mediile solide se manifestă forțe
în aceste medii undele pot fi atît transversale cît

10.4.2. **Lungime de undă. Viteză de propagare.** S
lui inițial. Presupunem că perturbația externă este
tîmplă în realitate de multe ori. Astfel, după un ti
bila *1* s-ar putea afla exact în situația dinaintea apl
tăm cu m bila pînă la care a ajuns unda la momentul
1 se află în aceeași situație și se vor mișca la fel, adi
vor fi egali la orice moment ulterior, $\vec{u}_m = \vec{u}_1$. Se sp
lează în fază, sînt în concordanță de fază. Puncte
lează la fel într-un mediu prin care se propagă o u
egală fază. Aceste puncte se dispun pe suprafețe îne

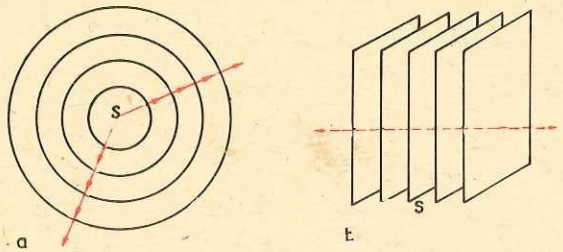


Fig. 10.21. *a)* Unde sferice *b)* unde plane.

oscilație, numite suprafețe de egală fază sau suprafețe de undă. Se poate demonstra că razele de undă sînt perpendiculare pe suprafețele de egală fază.

Forma suprafeței de undă depinde atît de proprietățile mediului cît și de forma sursei. În mediile omogene și izotrope, dacă sursa de oscilație este punctiformă sau sferică, suprafața de undă, deci și frontul de undă, sînt sfere concentrice. Undele care se formează în acest caz se numesc *unde sferice* (fig. 10.21, *a*).

Cînd sursa de oscilație este o suprafață plană atunci unda care se transmite este o *undă plană* (fig. 10.21, *b*).

La distanțe mari de sursa de perturbație o undă sferică poate fi considerată, într-o regiune mică a mediului, ca o undă plană, pe regiuni restrînse asimilîndu-se suprafața sferei de rază mare cu o suprafață plană.

Să aplicăm acum principiul lui Huygens: dacă bila m oscilează la fel ca bila *1* putem considera că unda care se propagă de la bila m la bilele $(m + 1)$, $(m + 2)$ etc. își are centrul de oscilație în bila m. Cum toate bilele din lanț sînt identice și lanțul este suficient de lung rezultă că prima bilă care va oscila exact la fel ca bila m va fi cea cu numărul $2m$ ș.a.m.d. Așadar bilele $1m$. $2m$, $3m$, ... vor fi bile care oscilează în fază. Același raționament se poate aplica oricărei particule-bile k $(1 < k < m)$. Concluzia este că, pe o rază de undă, punctele care oscilează în fază sînt egal depărtate.

Distanța dintre două puncte vecine (succesive) de egală fază se numește lungime de undă și se notează cu λ.

În general, lungimea de undă nu este aceeași pentru toate razele de undă, pentru orice direcție de propagare din mediul respectiv. Mediile (corpurile) în care lungimea de undă nu depinde de direcția de propagare se numesc medii izotrope.

Cu ce viteză se deplaseaza o undă, frontul undei, într-un mediu elastic?

În timp de o perioadă T unda parcurge distanța dintre două puncte de egală fază, situate pe aceeași direcție de propagare, adică distanța λ și deci putem scrie

$$v_f = \frac{\lambda}{T} \qquad (10.23)$$

unde v_f se numește *viteza de fază*, viteza de propagare a frontului de undă, a fazei.

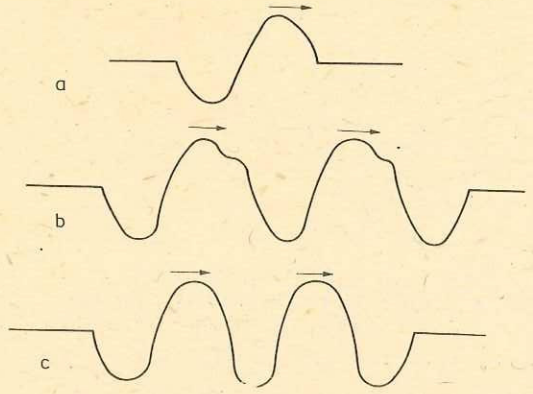


Fig. 10.22. Undă transversală pe un cablu (*a*). Tren de unde transversale (*b*) și (*c*).

Fig. 10.2 supun

10.4.3. Unde transversale

EXPERIMENT

a) Un cablu de cauciuc (o coardă, un resort Se observă că propagarea acestei perturbații se face culare pe direcția de transmitere a mișcării (fig. 10 este un exemplu de undă transversală.

Dacă se produce o perturbație exterioară la int este produsă o oscilație armonică, atunci pe cabl transmite perturbații succesive. Acest grup de tren de unde (fig. 10.22, *b* și *c*).

Producerea undelor transversale într-un cablu, este posibilă datorită faptului că orice parte a med în mișcarea sa părțile învecinate, provocînd solicitări În figură sînt prezentate trei părți vecine antrenate în Mișcarea părții *b* (din mijloc) nu se poate face fără an $\vec{F}_{ba}$) și *c* (forța $\vec{F}_{bc}$) care se opun prin forțele $\vec{F}_{ab}$ resp asigură cuplajul părților *a*, *b*, *c* și determină apariți deci a forțelor elastice de revenire. Evident numai în c deformări elastice de acest fel pe cînd în fluide nu. A pot apărea numai în mediile (corpurile) solide.

Dacă sursa de oscilație produce oscilații într- orice punct de pe direcția de propagare oscilează în oscilație al sursei). Deplasînd de-a lungul corzii (cablu al sursei, o fantă, vom constata că ea nu împiedică t (fig. 10.24). Se spune că undele transversale sînt *und*

b) Un model de mediu în care se propagă o un zintă bilele suspendate, reprezentate în figura 10.

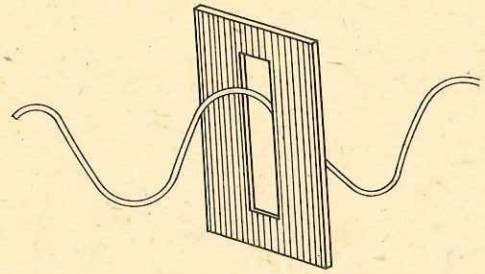


Fig. 10.24. Undă transversală plan polarizată.

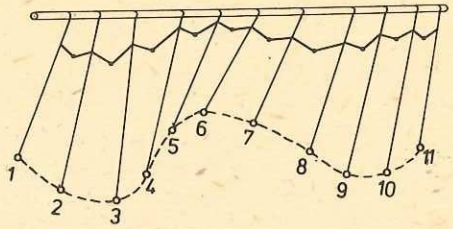


Fig. 10.25. Propagarea unei oscilații armonice pe un lanț de pendule gravitaționale.

drept pendule gravitaționale. Lanțul de pendule cuplate modelează un mediu omogen și izotrop.

Dacă punem în mișcare de oscilație un pendul din capătul lanțului, de exemplu pendulul *1*, printr-un impuls transmis perpendicular pe direcția lanțului de pendule, datorită cuplajului, energia se transmite de la pendulul *1* în lanțul de oscilatori. Pentru mediul format din lanțul de pendule, excitarea pendulului *1* constituie o perturbație și acest pendul poate fi considerat drept o sursă de oscilație. Menținînd mișcarea sursei, se constată că mișcarea celorlalți oscilatori continuă. Fiecare oscilator execută oscilații forțate cu frecvența impusă de frecvența sursei. Evident, procesul de propagare are loc în timp. Dacă măsurăm timpul necesar ca o perturbație să ajungă la un pendul oarecare din lanț, vom observa că acesta depinde de distanța dintre sursa de oscilație și pendulul considerat. Fiecare pendul intră în stare de oscilație mai tîrziu decît cel precedent. Faza mișcării fiecărui pendul diferă de a celui precedent și de a celui care urmează. Pentru că toți oscilatorii sînt identici și cuplajele sînt de același fel, viteza de propagare a oscilației este constantă, în absența forțelor disipative (forța de frecare). Cît timp viteza de propagare, viteza fazei sau viteza de fază rămîne constantă, distanța dintre doi oscilatori consecutivi, care oscilează în fază (*1* și *9*; *2* și *10*, figura 10.25) este constantă. Această distanță reprezintă chiar lungimea de undă, fapt ce justifică afirmația că această mărime este caracteristică unei unde cînd propagarea are loc într-un mediu izotrop și omogen.

Din relația (10.23) și din descrierea procesului de propagare, rezultă că lungimea de undă este determinată de doi factori: unul care depinde de sursă (perioada sau pulsația sursei) și al doilea (viteza de fază) care depinde de mediul de propagare, de proprietățile lui elastice, adică de cuplajul dintre particulele mediului.

Se demonstrează că viteza v_t de propagare a unei unde transversale pe o coardă depinde de tensiunea T_m la care este solicitată coarda și de masa μ a unității de lungime a corzii:

$$v_t = \sqrt{\frac{T_m}{\mu}},$$

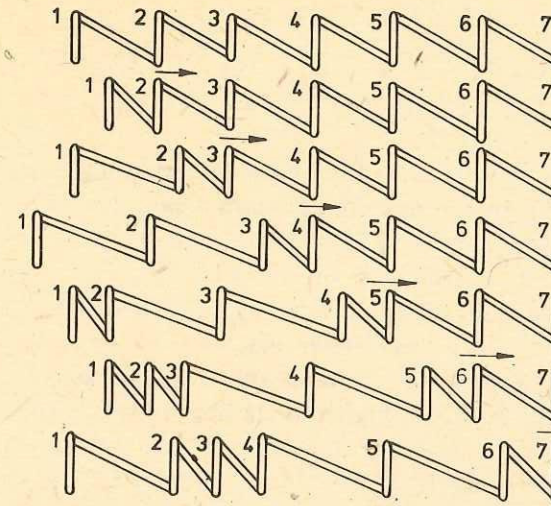


Fig. 10.26. Undă longitudinală într-un r

Dacă oscilațiile sursei nu sînt întreținute, amor
energia sursei fiind transferată lanțului de oscilato
Unda se stinge foarte repede.

10.4.4. **Unde longitudinale.** Să considerăm un
în repaus și echidistanțate (fig. 10.26.) Resortul îl
lanț de spire (oscilatori) cuplate elastic, fiecare spiră
axei sale în jurul unei poziții de echilibru. Provocăm
trăgînd de o spiră în lungul axei resortului și lăsînd
turbația se propagă în resort în lungul axului său
oscilație a fiecărei spire. Unda care a apărut în resor
undă longitudinală. Datorită frecărilor cu aerul și în
interne din materialul spirei, oscilațiile lor se sting
de repede starea de repaus.

Dacă prima spiră va fi pusă în mișcare, pe o cal
mișcare este oscilatorie armonică, atunci și spirele
mișcare asemănătoare după trecerea perturbației i
prinde resortul parcurs de o undă longitudinală, la
mate în fracțiuni din perioada oscilației armonice a s
Se observă că în timp ce comprimarea avansează s
care intră în mișcare continuă să oscileze în jurul
exemplu spira *1* face o oscilație completă între $t =$
o nouă comprimare care se va transmite în lungul
care oscilează în concordanță de fază cum sînt, de
2 și *6*.

Considerînd resortul un mediu omogen și izotrop
se va face de-a lungul resortului cu aceeași viteză v.

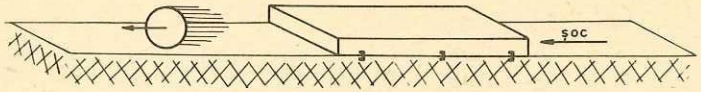


Fig. 10.27. Undă longitudinală într-un corp solid.

în care spira *1*, de exemplu, descrie o oscilație completă, distanța parcursă de perturbație este vT. Perturbația a ajuns pînă la spira *5* care începe să oscileze în fază cu spira *1*. Distanța dintre două spire consecutive (*1* și *5*, *2* și *6*) care oscilează în fază este lungimea de undă și constituie o caracteristică a undei respective. Unda longitudinală nu este polarizată ca unda transversală. Acest lucru se poate demonstra pe cale experimentală.

Undele longitudinale se pot forma atît în mediile solide cît și în cele fluide (lichide și gaze). Un exemplu de undă longitudinală într-un solid este transmiterea perturbației produsă de o lovitură de ciocan la capătul unei bare, în lungul acesteia. Acest lucru poate fi verificat, dacă la celălalt capăt al barei se alătură o bilă de bara fixată rigid. Cînd perturbația va ajunge la capătul barei, bila este proiectată pe direcția barei în sensul propagării perturbației (fig. 10.27).

Ca și în cazul undelor transversale, viteza de propagare a undelor longitudinale depinde de caracteristicile mediului de propagare. Se demonstrează că viteza v_l a unei unde longitudinale este

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

unde E reprezintă modulul de elasticitate iar ρ densitatea mediului de propagare.

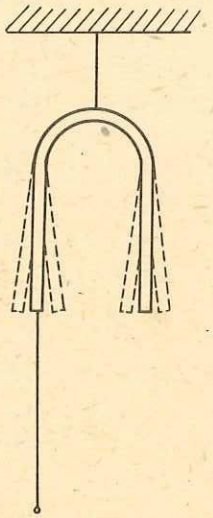


Fig. 10.28. Pentru exercițiul 1.

PROBLEME REZOLVATE

1. La capătul unei ramuri a unui diapazon (fig. 10.28), se leagă un fir de lungime $l = 2$ m și masă $m = 12$ g. De fir se suspendă un corp cu masa $m_1 = 960$ g. Diapazonul oscilează. Să se calculeze: *a)* viteza de propagare a undelor în fir; *b)* frecvența de oscilație a diapazonului, dacă lungimea de undă este de 40 cm. *c)* Cum se schimbă viteza de propagare a undei, dacă se dublează masa corpului suspendat?

Rezolvare: *a)* În fir se propagă unde transversale. Neglijînd efectul masei firului asupra tensiunii din fir avem:

$$T = G_1 = m_1 g \text{ și deci } v_l = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{m_1 g}{\frac{m}{l}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{960 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 2 \text{ m}}{12 \cdot 10^{-3} \text{ kg}}} = 40 \text{ m/s}.$$

b) Fiecare punct de pe fir oscilează forțat cu frecvența nului. Din $\lambda = vT$ și $\nu T = 1$ avem:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{40 \text{ m/s}}{40 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 10^2 \text{ s}^{-1} =$$

c) Masa corpului suspendat este acum $m_1' = 2m_1$ și vit

versale va fi $v_t' = \sqrt{\frac{T'}{\mu}}$. Raportul vitezelor de propa

$$\frac{v_t'}{v_t} = \sqrt{\frac{T'}{T}} = \sqrt{\frac{m_1'}{m_1}} =$$

2. Un muncitor de la calea ferată lovește cu ciocanul capă prin șină este auzit după 0,20 s de un al doilea munci șină. Se cere să se determine distanța dintre cei doi m oțel cu $\rho = 7\,800$ kg/m³ și modulul de elasticitate est

Rezolvare. Dacă se cunoaște viteza v_l de propagare a pe dera că se transmite sub forma unei unde longitudinale minată din relația $d = v_l t$:

$$v_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2}{78\,000 \text{ kg/m}^3}} =$$

$$d = v_l t = 5{,}06 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 20 \cdot 10^{-2} \text{ s}$$

10.4.5. **Intensitatea undei.** Să considerăm, într și izotrop, o sursă de oscilație care transferă conti tate de timp. Sursa are, deci, o putere constantă. în timpul t de mulțimea punctelor ce alcătuiesc

$$P = \frac{E}{t} = \Phi$$

definește *puterea emisă de sursă* sau fluxul de ener în watt. Energia emisă de sursă este transferată dintre fluxul de energie P și aria S a unei suprafe ția de propagare prin care are loc transferul d

$$I = \frac{P}{S}$$

definește densitatea de flux de energie sau *inten* care în S.I. se măsoară în W/m².

Deoarece energia transferată printr-o porțiun este suma energiilor tuturor oscilatorilor de pe ac pentru că energia unui oscilator armonic este pro amplitudinii) rezultă că densitatea fluxului de en nală cu pătratul amplitudinii oscilatorilor de pe

$$I \sim A^2.$$

Observație importantă!

Proprietatea cea mai importantă a unei und „energie". Transportul de „energie" are loc fără tra

10.5. ECUAȚIA UNDEI PLANE

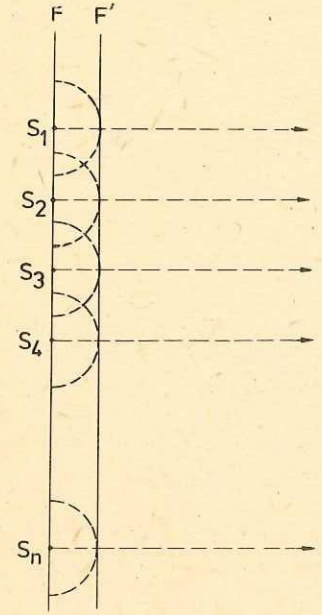


Fig. 10.29. Undă plană generată de mai multe surse de oscilație situate în același plan.

Ne propunem să stabilim care este expresia funcției $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$ pentru un caz concret: unda plană.

Știm că acest tip de undă se caracterizează prin faptul că suprafețele de egală fază sînt plane, adică sînt suprafețe care se închid la infinit. Avem de-a face, evident, cu o idealizare. O suprafață de egală fază poate fi considerată plană pe o porțiune mică, dacă este mult depărtată de sursa de oscilație. Se mai pot obține însă unde plane și altfel, anume folosind un număr mare de surse de oscilație dispuse pe un plan și care sînt în fază. Undele produse de aceste centre, separat, se compun și rezultatul este o undă plană (fig. 10.29).

Indiferent de modul de obținere, undele plane sînt caracterizate de faptul că amplitudinile oscilațiilor tuturor punctelor mediului sînt aceleași. Acest fapt este o consecință a legii conservării energiei: energia unui plan de oscilatori este preluată de un plan similar (același număr de particule) și prin urmare energia repartizată unui oscilator va fi aceeași (mediul de propagare este presupus nedisipativ). Cum energia de oscilație este proporțională cu puterea a doua a amplitudinii, A^2, consecința apare evidentă.

Să reluăm în discuție modelul lanț de resorturi și bile. Acest model este suficient pentru studiul undei plane întrucît ne putem imagina o mulțime de lanțuri avînd bilele în plane paralele între ele și perpendiculare pe resorturi. Dacă toate lanțurile sînt perturbate simultan și identic, vom obține o undă plană care se propagă prin sistemul lor. Cum fiecare lanț se comportă la fel ca celelalte este suficient să studiem numai unul, pentru a obține informații despre întreg sistemul.

Vom presupune că perturbația externă este armonică, adică elongația bilei *1* va fi o funcție de forma $u_1 = A \sin \omega t$. Oscilațiile sînt presupuse paralele sau perpendiculare pe lanț. Pulsația perturbației se presupune a fi egală cu pulsațiile proprii ale bilelor; se presupune deci existența unui cuplaj strîns, a unui transfer optim de energie.

Cum depinde elongația unei bile oarecare n din lanț de timpul de propagare de la sursa de oscilație și de distanța față de sursă?

Bila n va intra în oscilație mai tîrziu decît bila *1* și deci între cele două bile va exista un defazaj φ. Cum forțele care acționează asupra bilei n sînt

forțe elastice, oscilația sa va fi tot armonică și, u
dinea va fi aceeași. Deci elongația bilei n va fi de

$$u = A \sin(\omega t + \varphi) = A \sin \omega \left(\right.$$

Defazajul dintre cele două bile se datorează intră
bilei n față de bila *1*, adică timpului τ necesar un
de la bila *1* la bila n : $\tau = \frac{x}{v_f}$. Deci putem scrie

$$u = A \sin \omega(t - \tau)$$

Așadar bila n începe să oscileze cu o întîrziere
inițial fiind acela în care este aplicată perturbați
bila n are aceeași elongație pe care o avea bila *1*
mai devreme. Înlocuind pe τ rezultă

$$u = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v_f}\right) = A \sin \left(\right.$$

dar cum $\omega = \frac{2\pi}{T}$ și $v_f = \frac{\lambda}{T}$ rezultă:

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

Relația (10.29) reprezintă așa-numita *ecuație a un*
care a undei.

Observație. Dacă m este un număr întreg, p
în loc de $t \to t + mT$ rezultă:

$$u(t + mT,\ x) = A \sin 2\pi \left(\frac{t + mT}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = A$$

$$= A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi m\right] = A \sin 2\pi \left(\right.$$

adică funcția are perioada T.

Păstrînd t constant avem $u(x, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} -\right.$

$$u(x + m\lambda, t) = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + m\lambda}{\lambda}\right) = A s$$

$$= A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi m\right] = A \sin 2$$

Rezultă că: $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$ este periodică atît în timp
(cu perioada λ). În acest fel unda trebuie concepută
periodic. Perioada temporală este perioada de oscila
lungimea de undă λ.

O undă este un fenomen periodic în timp și spațiu.

Relația (10.29) ne permite să exprimăm defazajul dintre doi oscilatori aflați la distanța x_1 respectiv x_2 de o sursă de oscilație, pe aceeași rază de undă, la același moment t. Într-adevăr dacă

$$u_1 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) \text{ și } u_2 = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right)$$

reprezintă elongațiile celor doi oscilatori, atunci defazajul este:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_2).$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x. \tag{10.30}$$

Dacă Δx, diferența de drum dintre cei doi oscilatori, respectiv dintre suprafețele de undă cărora aparțin, este de forma $2k\frac{\lambda}{2}$, $\left(\text{un număr par de } \frac{\lambda}{2}\right)$, atunci $\Delta\varphi$, defazajul, este $2k\pi$ și cei doi oscilatori, suprafețele lor de undă, sînt în fază.

În cazul în care $\Delta x = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$, $\left(\text{număr impar de } \frac{\lambda}{2}\right)$, atunci defazajul $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$ și cei doi oscilatori sînt în opoziție de fază.

Exercițiu. O sursă de unde plane oscilează după ecuația $u = 3 \cdot 10^{-1} \sin \frac{\pi}{9} t$. Dacă viteza de propagare a undelor este de 2 m/s: *a)* să se scrie ecuația undei; *b)* să se afle diferența de fază între oscilațiile a două puncte M și N aflate la distanța de 3 m respectiv de 4 m de sursă.

Rezolvare. a) Ecuația undei plane este

$$u = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right).$$

Comparînd legea de oscilație a sursei cu relația $u = A \sin(\omega t + \varphi)$ observăm că $\omega = \frac{\pi}{9}$ rad/s, de unde $T = \frac{2\pi}{\omega} = 18$ s, ceea ce permite calcularea lungimii de undă: $\lambda = vT = 2 \text{ m/s} \cdot 18 \text{ s} = 36$ m. Putem scrie acum ecuația undei plane:

$$u = 3 \cdot 10^{-1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{18} - \frac{x}{36}\right).$$

b) Punctele M și N oscilează după legile

$u_M = 3 \cdot 10^{-1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{18} - \frac{3}{36}\right)$, $u_N = 3 \cdot 10^{-1} \sin 2\pi \left(\frac{t}{18} - \frac{4}{36}\right)$, diferența de fază este deci $\varphi_1 - \varphi_2 = \Delta\varphi = 2\pi \left(\frac{t}{18} - \frac{3}{36}\right) - 2\pi \left(\frac{t}{18} - \frac{4}{36}\right) = \frac{\pi}{18}$ rad.

10.6. CLASIFICAREA UNDELOR ELASTICE

Am reținut din paragrafele anterioare că ur
mediile elastice se numesc unde elastice. Considerî
ție este un oscilator armonic, adică un oscilator s
care se transmit în mediile elastice sînt sinusoidale
vin de la izvoare de oscilație, a căror frecvență
16 Hz — 20 000 Hz, deci care pot produce senzați
unde sonore sau *sunete*. Oscilațiile, respectiv und
situată între 20 k Hz și 100 GHz se numesc *ultras*
sub 16 Hz *infrasunete*.

În ultimii ani au început studii sistematice as
și absorbției infrasunetelor datorită constatării că
ență asupra organismelor vii. Această influență se
murile specifice organismelor vii se produc cu fr
transferul de energie dintre un infrasunet și un o
tant (la rezonanță).

O categorie aparte de unde elastice o const
adîncimi de ordinul sutelor de kilometri în inte
se acumulează, în timp, tensiuni foarte mari dator
rupturi și deplasări care se resimt sub forma uno
mite cutremure. Regiunea din interiorul Pămîntu
carea se numește focar sau hipocentru, iar locul d
tticala locului se numește epicentru. Mediul alcăt
elastice însemnate face posibilă transmiterea pe
unde, unda seismică. Unda seismică constă din:
și unda seismică longitudinală. Frecvența undelo
intervalul 10—25 Hz.

10.7. CONDIȚII DE AUDIBILITATE A OSCI

Senzația de sunet se datorește punerii în vibr
terminațiilor nervului auditiv, prin intermediul di
Pentru a fi percepute ca sunete, oscilațiile din
lemn sau oțel) care ajung la ureche, trebuie să înd
de frecvență și de intensitate.

Știm că frecvențele oscilațiilor sonore (sunet
Hz și 20 000 Hz. Aceste limite sînt diferite de la
deosebit limita superioară (care pentru același in
În ceea ce privește intensitatea sunetului ea
asemenea, între anumite limite. Spre intensitățile
care sunetele nu mai pot fi percepute, $I_{min} = 10$
iar spre intensitățile mari există o limită peste

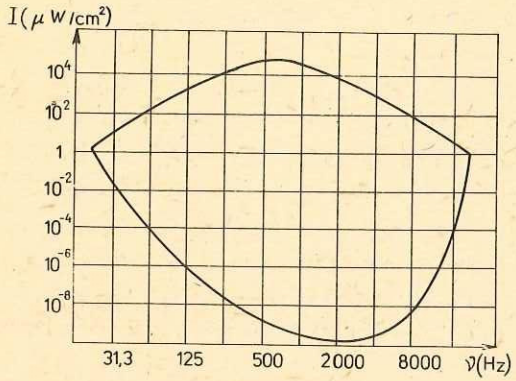


Fig. 10.30. Limitele de audibilitate.

transformă în senzaţie de durere, $I_s = 10^2$ W/m² (la $\nu = 1$ kHz). În figura 10.30 s-au trasat, aproximativ, limitele inferioară şi superioară de intensitate audibilă pentru diferite frecvenţe. Se poate observa că lărgimea suprafeţei intensităţilor audibile variază cu frecvenţa, îngustîndu-se spre frecvenţe foarte joase şi foarte înalte, atingînd valoarea cea mai mare în jurul frecvenţei $\nu = 1\,000$ Hz.

În afară de limitele de frecvenţă şi de intensitate se mai impune undelor sonore şi o limită de durată. Pentru ca o oscilaţie elastică, care se află între limitele audibile de frecvenţă şi intensitate, să poată fi percepută ca sunet, ea trebuie să dureze un timp minim. Pentru un observator standard (mediu) această durată este de cel puţin $\frac{1}{100}$ s. Dacă timpul este mai mic decît cel limită, oscilaţia elastică este percepută sub formă de pocnet.

10.8. REFLEXIA ŞI REFRACŢIA UNDELOR

10.8.1. **Undă reflectată, undă refractată.** Să presupunem că avem două medii în contact adică, pe o anumită suprafaţă, particulele unuia dintre ele interacţionează cu particulele celuilalt. Să notăm cele două medii cu A şi B şi să presupunem că prin mediul A se propagă o undă către suprafaţa de separare (a, b) (fig. 10.31). În momentul în care unda ajunge la particulele de mediul A, situate pe suprafaţa (a, b), acestea încep să oscileze. Cum particulele mediului B, aflate pe suprafaţa de contact, sînt în interacţiune cu cele

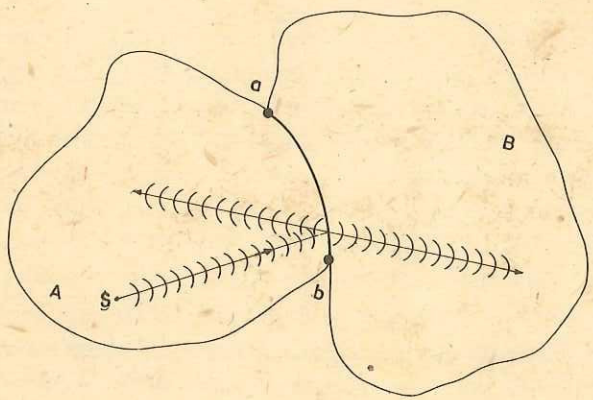


Fig. 10.31. Reflexia şi refracţia unei unde elastice.

ale mediului A, rezultă că oscilaţiile se vor transm
B şi odată cu ele şi o parte din energia iniţială.

Oscilatorii din mediul A, de pe suprafaţa de s
pus în stare de oscilaţie particulele mediului B,
însă cu amplitudini mai mici. Aceşti oscilatori devi
se va propaga tot prin mediul A, dar care va fi dife
gia transportată de această nouă undă va fi difere
şi energia transferată mediului B.)

Unda care ia naştere în mediul B se numeşte
refractată, iar cea care se formează în mediul A, *un*

Cum se propagă cele două unde? Cum se pot
propagare?

Principiul lui Huygens enunţat, acum, pentru
să obţinem răspuns la întrebările puse.

*Fie o undă care se propagă printr-un mediu; d
se înlocuieşte frontul ei de undă cu o mulţime de osci
sursă pentru cîte o undă sferică (undă secundară s
pagă înainte, atunci frontul undei principale la
este suprafaţa tangentă (înfăşurătoarea) la frontu
momentul Δt de la generarea lor).*

O altă formulare a principiului lui Huygens

*Orice punct de pe o suprafaţă de undă poate fi
de perturbaţie de la care se propagă înainte unde sfer*

Figura 10.32, *a* şi *b* ilustrează construirea fro
principiului lui Huygens: *a)* pentru unde circular

Se poate ilustra principiul lui Huygens prin
suprafaţa unui lichid, folosind aparatul de produ
vibrator produce perturbaţia stratului superficial
rează unde circulare pe suprafaţa apei (fig. 10.33,
cilindru de tablă cu multe fante înguste practica

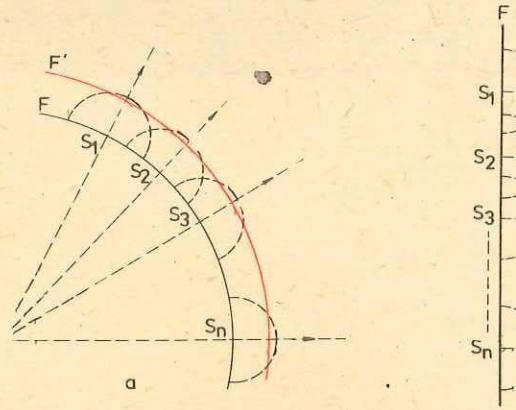


Fig. 10.32. Principiul lui Huygens. Constru
undă pentru unde circulare (*a*) şi unde

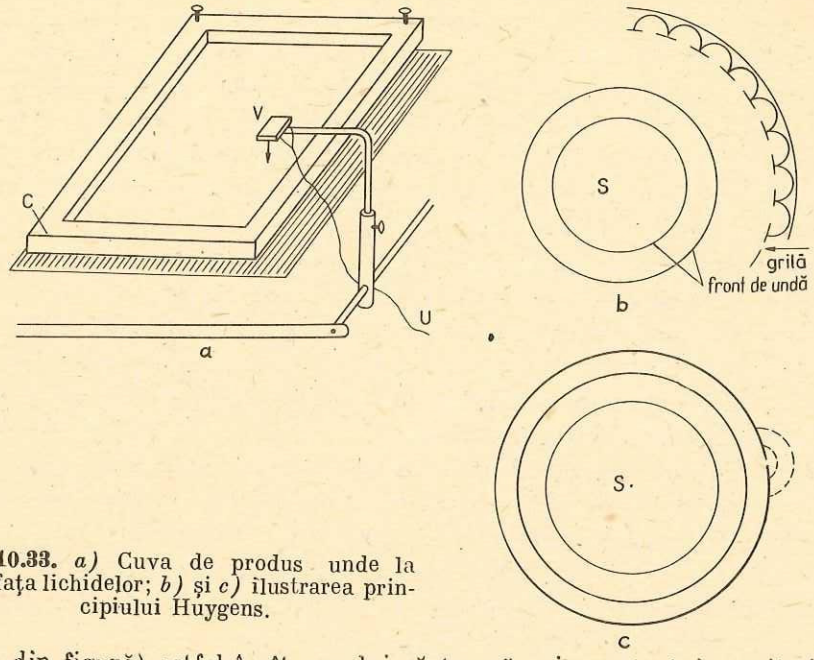
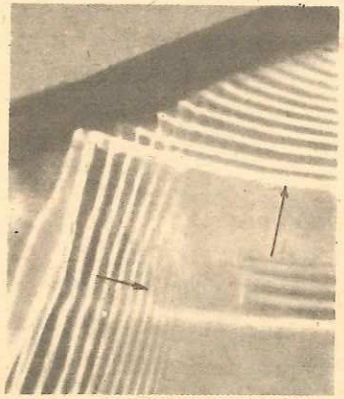


Fig. 10.33. *a)* Cuva de produs unde la suprafaţa lichidelor; *b)* şi *c)* ilustrarea principiului Huygens.

(grila din figură) astfel încît axa lui să treacă prin centrul de oscilaţie, vom observa că frontul circular al undei se reface dincolo de cilindru. Dacă închidem toate fantele cu excepţia uneia, vom observa unde circulare care se propagă înainte din această fantă şi care se comportă ca un nou centru de oscilaţie (fig. 10.33, *c*).

10.8.2. **Reflexia şi refracţia undelor superficiale.** *a) Reflexia.* În cuva aparatului de produs unde se produc unde liniare. Aşezînd un obstacol în calea undelor, se observă fenomenul de reflexie, undele emise de izvorul de oscilaţie revenind în mediul în care s-au propagat la incidenţa cu obstacolul (peretele) P care constituie un mediu cu alte caracteristici decît mediul iniţial (fig. 10.34, *a*).

De observat că direcţia de propagare SI a undei incidente se schimbă devenind IR (fig. 10. 34, *b*). Se construieşte perpendiculara NI pe peretele P



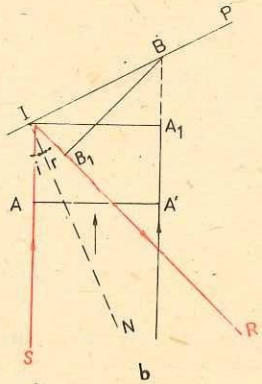


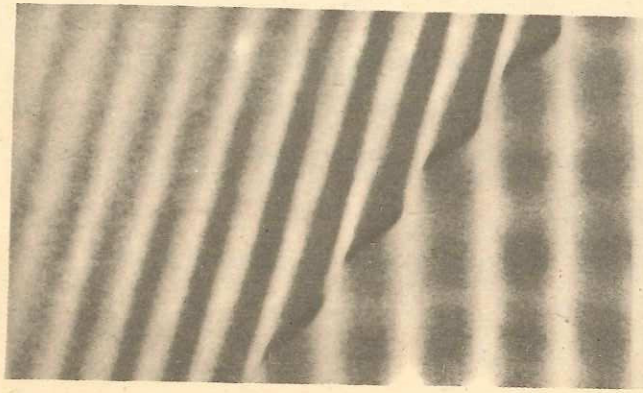
Fig. 10.34. Reflexia undelor: *a)* fotografie în cuvă; *b)* schema geometrică corespunzătoare situaţiei din *a)*.

în punctul de incidenţă I. Unghiul $\widehat{SIN} = \hat{i}$ se nun
iar unghiul $\widehat{NIR} = r$ se numeşte *unghi de reflexie.*

b) Refracţia. La acelaşi aparat, modificînd adînc
prin aşezarea pe fundul cuvei a unei plăci, schimbăm
lui (viteza undelor în regiunea mai puţin adîncă est
din figura 10.35, *a* arată cum se schimbă direcţia und
în alt mediu. Direcţia SI, după trecerea liniei care se
devine IR (fig. 10.35, *b*).

Schimbarea direcţiei de propagare a undei la sup
două regiuni în care vitezele de propagare sînt difer
Unghiul r se numeşte unghi de refracţie. Se observă,
de refracţie este mai mic decît unghiul de incidenţă.

10.8.3. **Legile reflexiei şi refracţiei.** *a) Legea refl*
porţiune a frontului de undă plan AA' care avansează
SI către suprafaţa de separare P pe care o atinge
(fig. 10.34, *b*). La un anumit moment poziţia frontului d
fiecare punct al frontului care va atinge suprafaţa P
tare care conform principiului lui Huygens se vor pro



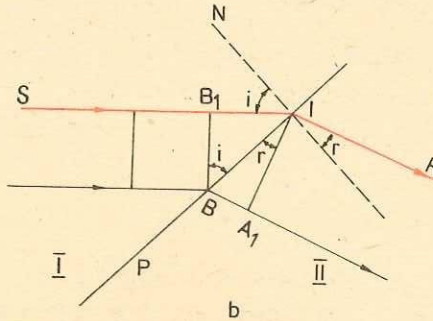


Fig. 10.35. Refracţia undelor: *a)* fotografie în cuvă; *b)* scher
zătoare situaţiei din *a)*.

În intervalul de timp Δt, începînd cu momentul t și sfîrșind cu momentul $(t + \Delta t)$, moment la care punctele frontului de undă IA_1 au luat contact cu peretele, undele elementare produse succesiv de toate punctele dintre I și B se propagă de la perete înapoi în mediul din care au venit. Suprafața tangentă fronturilor de undă ale tuturor acestor unde elementare (înfășurătoarea) formează noul front de undă B_1B care se deplasează pe direcția IR. Se observă că triunghiurile dreptunghice IA_1B și BB_1I sînt egale avînd IB latura comună și $A_1B = IB_1 = v\Delta t$. Rezultă că $\sphericalangle A_1IB = \sphericalangle B_1BI$ sau

$$\hat{i} = \hat{r}. \tag{10.31}$$

Deci, la reflexie, unghiul de reflexie este egal cu unghiul de incidență.

b) Legea refracției. Porțiunea BB_1 a frontului de undă incident avansează cu viteza v_1 pe direcția SI spre suprafața de separare P pe care o atinge în B la momentul t și în I la momentul $(t + \Delta t)$ (fig. 10.35, *b*). În intervalul Δt, succesiv, din toate punctele situate între B și I, se propagă unde elementare cu viteza $v_2 \neq v_1$. Tangenta tuturor fronturilor acestor unde formează frontul undei refractate care la momentul $(t + \Delta t)$ ocupă poziția A_1I. Din triunghiurile BB_1I și BA_1I, triunghiuri dreptunghice, putem scrie:

$$\sin \widehat{B_1BI} = \frac{B_1I}{BI} = \frac{v_1 \Delta t}{BI} \text{ și } \sin \widehat{BIA_1} = \frac{BA_1}{BI} = \frac{v_2 \Delta t}{BI}.$$

Dacă facem raportul $\dfrac{\sin \widehat{B_1BI}}{\sin \widehat{BIA_1}}$ și observăm că: $\widehat{B_1BI} = \hat{i}$ (unghiul de incidență) iar $\widehat{BIA_1} = \hat{r}$ (unghiul de refracție) obținem legea refracției:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}. \tag{10.32}$$

Raportul $\dfrac{v_1}{v_2} = n_{21}$ se numește indice de refracție al mediului *2* față de mediul *1*.

Știind că $\lambda = vT$ putem scrie: $\lambda_1 = v_1T$, respectiv $\lambda_2 = v_2T$, lungimile de undă ale undelor care se propagă în cele două medii. Relația (10.32) poate fi scrisă:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{10.33}$$

Exerciţiu. Undele produse într-o cuvă cu apă trec dintr-o regiune mai puțin adîncă în una mai adîncă și se refractă. Știind că unghiul de incidență este de 19° iar cel de refracție de 30° să se afle: *a)* raportul vitezelor în cele două regiuni; *b)* raportul lungimilor de undă din cele două regiuni.

Rezolvare. a) Din legea refracției $\dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{v_1}{v_2}$ înlocu

$\dfrac{\sin 19°}{\sin 30°} = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{2}{3}$. *b)* Din relația (10.33) putem scr

10.8.4. Reflexie cu schimbare de sens

EXPERIMENT

Se produce o perturbație transversală, pute
sau pe un tub de cauciuc al cărui capăt este lăsat
sau inel (fig. 10.36, *a*), sau este fix (fig. 10.36,*b*). Se
propagarea unei „creste" de undă spre capătul ei
cu deviere în aceeași parte adică tot ca o creastă. Î
ca o „depresiune" (adîncitură).

În ambele cazuri, perturbația este reflecta
întîlnirea cu un perete — obstacol), dar felul refle
capătul corzii poate oscila liber transversal, nu
liber, sau dacă la capăt nu poate apărea nici o osc

Așadar „creasta" unei unde transversale se re
tul liber ca o „creastă" de undă, iar la capă
de undă.

Unda suferă la capătul fix un salt de fază
de $\dfrac{\lambda}{2}$ pentru că după reflexie toate punctele v
a tubului (corzii), față de unda incidentă.

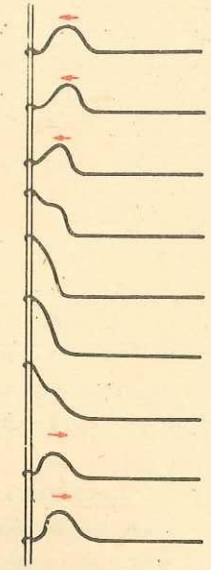


Fig. 10.36. Reflexia unei perturbații care se propagă pe o coardă (desenele sînt distanțate uniform în timp). *a)* La capătul liber faza nu se schimbă, după reflexie; *b)* prin reflexie la capătul fix se schimbă faza cu 180°.

a

O undă transversală se reflectă la capătul liber fără schimbare de fază, iar la capătul fix cu o schimbare de fază de π sau o „pierdere" de $\frac{\lambda}{2}$.

Concluzii identice se obţin dacă se analizează reflexia unei unde longitudinale.

10.9. DIFRACŢIA

Ce se întîmplă atunci cînd undele care se propagă într-un mediu oarecare întîlnesc obstacole de dimensiuni comparabile cu lungimea de undă?

EXPERIMENT

În calea unor unde plane produse pe suprafaţa apei, în cuva de producere a undelor, se aşază succesiv obstacole liniare de diferite dimensiuni (fig. 10.37, *a*, *b*, *c*) sau se lasă să treacă undele prin deschideri (fante) diferite (fig. 10.37, *d*, *e*, *f*).

În primul caz observăm că undele pătrund cu atît mai mult în „spaţiul umbrei" geometrice din spatele obstacolului cu cît dimensiunile obstacolului devin mai mici. Şi în al doilea caz se observă că regiunea în care se propagă unda în zona de „umbră" este cu atît mai mare cu cît deschiderea este mai mică.

Abaterea unei unde de la direcţia iniţială de propagare la trecerea pe lîngă obstacole şi la traversarea fantelor se numeşte difracţie.

Observaţie. Difracţia este un fenomen distinct de cel de refracţie. Refracţia apare la trecerea unei unde dintr-un mediu în altul cu viteze diferite de propagare; difracţia apare la propagarea undei în acelaşi mediu fără schimbarea vitezei de propagare.

EXPERIMENT

Să repetăm experimentele de mai sus cu unde a căror lungime de undă diferă mult faţă de dimensiunile fantelor (obstacolelor). Figura 10.38 ilustrează efectul unei fante asupra unor unde cu lungimea de undă mult mai mică decît deschiderea sa, respectiv cu lungimea de undă comparabilă cu dimensiunea fantei.

Experienţa arată că factorul determinant pentru fenomenele de difracţie este raportul dintre lungimea de undă şi dimensiunea obstacolului difractant. Difracţia este deosebit de pronunţată atunci cînd dimensiunile obstacolelor difractante sînt comparabile cu lungimea de undă.

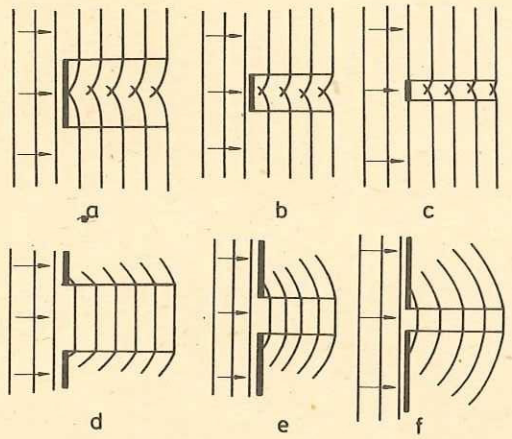


Fig. 10.37. Difracţia undelor pe obstacole şi fante de diferite lăţimi.

Fenomenul de difracţie poate fi explicat pe l
gens. Se consideră frontul de undă care a atins
dintr-o mulţime de centre (surse) noi de oscilaţii
mentare (fig. 10.37). În figura 10.37, *f* se observă fo
tare individuale; are loc o difracţie pronunţată.

10.10. INTERFERENŢA. UNDE ST

10.10. 1. **Interferenţa undelor**

EXPERIMENT

La capetele unei corzi (tub de cauciuc, lanţ
printr-o perturbaţie, două creste de unde, ambele
de o parte şi alta de cealaltă parte a corzii (fig. 10.3

Se observă că ambele creste de undă se depl
nestingherite atît înainte cît şi după ce se întîlnesc
de undă se întîlnesc apare o creastă vizibilă mai în
formarea dispare complet (fig. 10.39, *b*). Experimen

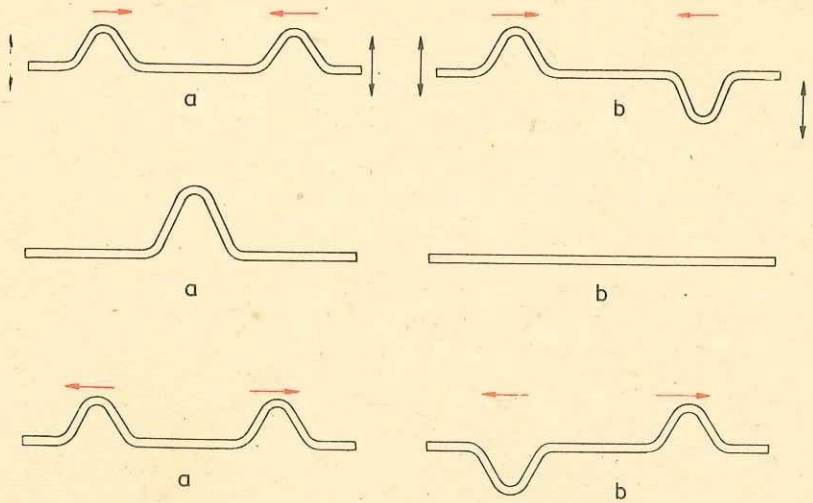


Fig. 10.39. Suprapunerea a două perturbații: *a)* cu aceeași fază; *b)* cu fază opusă.

ajutorul lanțului de pendule. În acest caz, în momentul întîlnirii perturbațiilor, unul din pendule deviază mult mai mult decît celelalte (*a*) sau abia se mișcă (*b*).

Ne întîlnim aici cu o situație deosebită, caracteristică propagării undelor. Peste unul și același lanț de oscilatori pot trece în același timp perturbații diferite, provenite de la două unde, fără ca undele care se produc pe lanțul (mediul) de oscilatori să se perturbe una pe alta. În locul în care cele două unde se întîlnesc ele se suprapun într-un mod foarte simplu: *amplitudinile oscilațiilor produse de cele două unde se adună (algebric).*

Faptul că după întîlnire undele trec mai departe complet neschimbate, iar în timpul întîlnirii amplitudinile lor se adună, poartă denumirea de suprapunere neperturbată sau de principiul superpoziției neperturbate a undelor.

O importanță deosebită o prezintă cazul în care undele care se întîlnesc au aceeași lungime de undă și determină oscilații de aceeași frecvență (pulsație), unde denumite coerente.

Suprapunerea (compunerea) neperturbată în același loc, dintr-un mediu, a două sau mai multe unde de aceeași lungime de undă sau aceeași pulsație se numește interferență.

Pentru fenomenul de interferență a două unde care se propagă pe aceeași direcție este importantă diferența de drum dintre cele două oscilații care se suprapun în același loc. În figura 10.40, *a*, diferența de drum Δx dintre oscilațiile produse de cele două unde este nulă și deci oscilațiile provocate de ambele

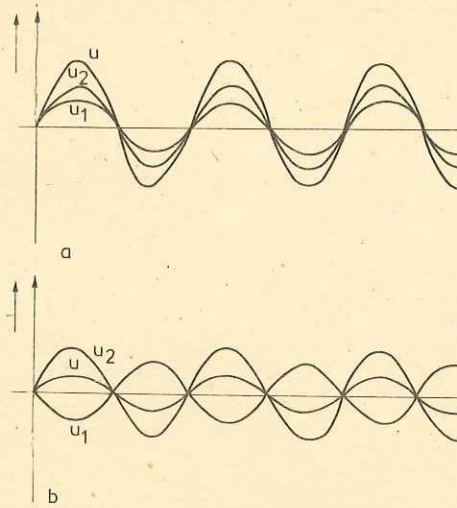


Fig. 10.40. Interferența a două unde cu ac
de undă: *a)* cînd diferența de drum este n
diferența de drum este de o jumătate de lung

unde sînt în fiecare punct de întîlnire, în fază. Cel
una pe alta, oscilația rezultantă se face cu amplit
10.40, *b* diferența de drum dintre oscilațiile produs
$\Delta x = \frac{\lambda}{2}$. Oscilațiile produse de cele două unde, în

prezenta o diferență de fază $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$. Cel
reciproc, amplitudinea oscilației rezultante este mini
undelor sînt egale, oscilația rezultantă este nulă, c
complet una pe alta.

Observație. Două unde care interferă, se intensifică s
într-un anumit punct, cînd diferența de drum este ze

tudini egale ele se anulează complet dacă $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$

Dacă ținem seama de relația (10.30) se observă

a) amplificare maximă, cînd diferența de d

este un număr par de $\frac{\lambda}{2}$. Din $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$ rezu
avem $\Delta\varphi = 2k\pi (k = 0, 1, 2, \ldots)$. Deci un maxim
unei diferențe de drum de forma $2k\frac{\lambda}{2}$ sau unei d

b) atenuare maximă, cînd diferența de drum $\Delta x = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$. În acest caz rezultă pentru $\Delta\varphi$ condiția $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$. Adică atenuarea maximă a două unde corespunde unei diferențe de drum de forma $(2k + 1)\frac{\lambda}{2}$ sau unei diferențe de fază de forma $(2k + 1)\pi$.

Zona în care se produce suprapunerea undelor se numește cîmp de interferență. Să considerăm un punct P din zona de interferență a undelor plane care provin de la două centre de oscilații C_1 și C_2, care au aceleași pulsații (fig. 10.41). Vom presupune că oscilațiile care ajung în punctul P sînt oscilații armonice și au elongațiile paralele de forma:

$$y_1 = A_1 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T'} - \frac{x_1}{\lambda}\right),$$

$$y_2 = A_2 \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda}\right).$$

Punctul P va descrie o mișcare rezultată din compunerea celor două oscilații și după cum se știe de la compunerea oscilațiilor paralele și de aceeași pulsație această mișcare este oscilatorie armonică. Amplitudinea mișcării rezultante este dată de relația:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi.$$

Dar cum $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$, avem pentru amplitudinea oscilației rezultante:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1)\right]. \qquad (10.34)$$

Rezultă că amplitudinea oscilației în punctul P depinde de amplitudinile oscilațiilor care se suprapun și de diferența de drum $\Delta x = x_2 - x_1$ dintre oscilații în punctul de interferență.

În ipoteza că propagarea oscilațiilor se face într-un mediu în care nu există amortizare, amplitudinea oscilației rezultante va depinde numai de diferența de drum Δx dintre cele două oscilații.

În situația în care această diferență de drum este constantă și amplitudinea oscilației rezultante din punctul P este constantă.

Interferența în care toate punctele din cîmpul de interferență oscilează cu o amplitudine constantă în timp se numește *interferență staționară*.

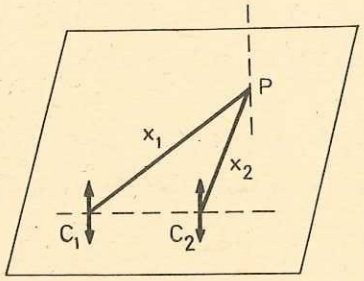


Fig. 10.41. Două centre de oscilație de aceeași pulsație într-un mediu elastic.

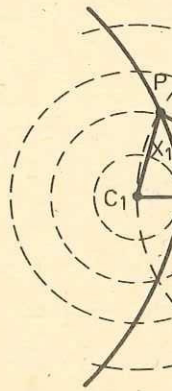


Fig. 10.42. Pentru fiecare valoare a diferenței de drum se obțin două curbe simetrice în raport cu mediatoarea segmentului C_1C_2.

Valoarea amplitudinii oscilației fiecărui punct din cîmpul de diferența de drum Δx. În zona de interferență există pu rență de drum față de cele două centre de oscil amplitudine.

Curbele care unesc aceste puncte reprezintă un loc geomet ferența de drum față de două puncte fixe este constantă (l valoare a diferenței de drum se obțin două curbe simetrice mentului C_1C_2 (fig. 10.42), de egală amplitudine și care interferență.

După cum s-a afirmat mai înainte, există valori ale difere oscilația rezultantă poate avea amplitudine maximă sau m diferenței de drum, se pot obține din relația (10.34) punînd

a) $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 1$, pentru amplitudine maximă (A

sau $\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = 2k\pi$, condiție din care rezultă:

$$x_2 - x_1 = k\lambda = 2k\frac{\lambda}{2};$$

b) $\cos\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = -1$, pentru amplitudine minim

$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = (2k + 1)\pi$, de unde se obține:

$$x_2 - x_1 = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Așadar toate punctele din cîmpul de interferență pentru c un număr par de $\frac{\lambda}{2}$, oscilează cu amplitudine maximă A =

care diferența de drum este un număr impar de $\frac{\lambda}{2}$, oscilează

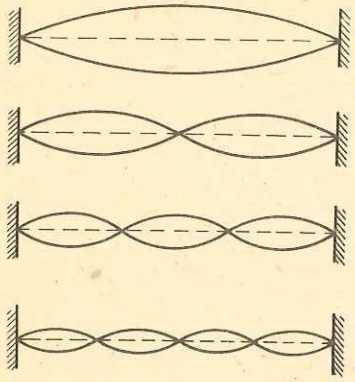


Fig. 10.43. Unde staționare pe un fir întins.

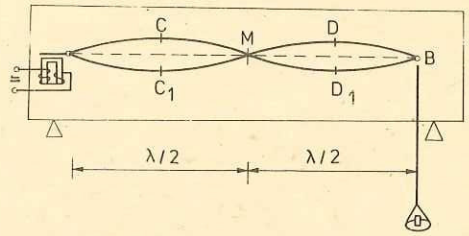


Fig. 10.44. Dispozitiv pentru producerea undelor staționare pe fir.

$A = A_1 - A_2$. Curbele care unesc punctele de maximă și minimă amplitudine se numesc franje de maximă și minimă interferență. Evident pentru cazul particular $A_1 = A_2 = a$ obținem $A = 2a$ pentru amplitudine maximă și $A = 0$ pentru amplitudine minimă.

10.10.2. **Unde staționare.** Să perturbăm o coardă sau un resort elastic lung, provocînd apariția unor unde transversale cu pulsații diferite. Să lăsăm undele să se reflecte la capătul fix sau liber. Se constată că în întregul sistem se produc stări de oscilație caracteristice care nu se „deplasează" în timp ci rămîn pe loc, staționează. Fenomenul se produce datorită suprapunerii undei incidente, produsă de sursa perturbatoare și undei reflectate, la capătul fix sau la cel liber.

Acest caz deosebit de interferență se numește undă staționară. *Unda staționară apare cînd două unde de lungimi de undă egale, care se propagă în sensuri opuse, se suprapun.*

Unda staționară prezintă la distanțe egale cu $\frac{\lambda}{2}$ locuri în care oscilația este stinsă complet, *noduri* de oscilație și între ele locuri în care punctele oscilează cu amplitudine maximă, *ventre* de oscilație.

Dacă în experiențele care pun în evidență undele staționare partea sursei de oscilație se consideră capăt fix atunci figura 10.43 redă cîteva cazuri de formare a undelor staționare pe un fir întins, cînd celălalt capăt este tot fix. Figura 10.44 prezintă aparatul cu care pot fi produse și puse în evidență astfel de unde staționare.

Pentru a explica apariția nodurilor și ventrelor de oscilație să considerăm un punct oarecare P de pe firul întins (fig. 10.45), solicitat simultan de unda incidentă și de unda reflectată. Diferența de drum, dintre aceste două unde, este

$$\Delta x = \left(l + x + \frac{\lambda}{2}\right) - (l - x) = 2x + \frac{\lambda}{2},$$

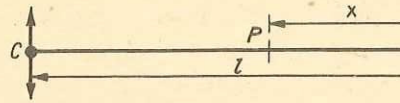


Fig. 10.45. Punctul P de pe fir este
nat în mișcare atît de unda incidentă
de cea reflectată.

unde $\frac{\lambda}{2}$ reprezintă diferența de drum (pierderea) intro

fix al firului $\left(\text{reflexie cu pierdere de } \frac{\lambda}{2}\right)$. În ipoteza c

pativ, amplitudinea oscilațiilor rămîne constantă în ti
rezultantă este

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}$$

dar cum $A_1 = A_2 = a$ (unda reflectată are aceeași am
și $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Delta x$ obținem:

$$A = \sqrt{2a^2 + 2a^2 \cos \frac{2\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right.}$$

Considerînd cunoscută relația $1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ se

$$A = \sqrt{2a^2\left[1 + \cos\frac{2\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right)\right]} = \sqrt{4a^2 c}$$

deci

$$A = 2a\,\cos\frac{\pi}{\lambda}\left(2x + \frac{\lambda}{2}\right).$$

Din relația (10.35) observăm că amplitudinea oscilației
de timp dar variază periodic cu poziția punctului pe fir (
B al firului din figura 10.45). Toate punctele pentru ca
cu amplitudine maximă. Aceste puncte sînt tocmai p
află față de punctul de reflexie la distanțele

$$x_v = (2k - 1)\frac{\lambda}{4}, \quad k \geqslant 1$$

Punctele pentru care $2x + \frac{\lambda}{2} = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$, au am
repaus), sînt punctele numite noduri și sînt situate fa
distanțele

$$x_n = 2k\frac{\lambda}{4} = k\frac{\lambda}{2}, \quad k \geqslant 0$$

Poziția nodurilor și ventrelor, pe fir, nu se schimbă: punctele care oscilează cu amplitudine maximă, respectiv minimă (zero), rămîn tot timpul aceleași, de aici și numele de unde staționare.

Pentru cazul firului fixat la cele două capete, reflexia se face cu schimbare de semn pentru elongație $\left(\text{pierdere de } \frac{\lambda}{2}\right)$. În fir se formează unde staționare dacă este îndeplinită condiția $l = n\frac{\lambda}{2}$, adică lungimea firului este egală cu un număr întreg de $\frac{\lambda}{2}$.

10.11. COARDE ȘI TUBURI SONORE

10.11.1. **Proprietățile caracteristice ale unui sunet.** În paragraful 10. 6 au fost denumite sunete undele elastice a căror frecvență este cuprinsă între 16 Hz—20 kHz.

Un sunet perceput de ureche are anumite proprietăți care pot fi explicate prin mărimile fizice caracteristice sunetului și prin particularitățile organului auditiv. Se disting trei proprietăți fizice: înălțimea, intensitatea și timbrul.

a) Înălțimea. Senzația fiziologică de sunet ascuțit (înalt) și de sunet grav (jos) este determinată numai de frecvența undei sonore.

b) Intensitatea auditivă. Senzația fiziologică de intensitate a sunetului se măsoară prin intensitatea auditivă (tăria sunetului). Auzul nu dă pentru două sunete diferite senzații în același raport de tărie ca raportul intensităților lor sonore. Dacă se consideră ca intensitate de referință I_0, pragul minim de audibilitate $I_0 = 10^{-12}$ W/m² (la 1 kHz), atunci se definește (L) nivelul de intensitate sonoră al unui sunet de intensitate I prin relația:

$$L = \lg \frac{I}{I_0}. \qquad (10.36)$$

Nivelul de intensitate sonoră se măsoară în belli (B) și în decibelli (dB).

c) Timbrul. Un sunet emis de o sursă sonoră (coardă, tub etc.) are un caracter complex. Alături de sunetele principale, numite sunete fundamentale, o sursă sonoră emite simultan și cîteva din armonicile sunetului fundamental. De exemplu, frecvența fundamentală pentru nota la sau armonica I^a este de 440 Hz; *orice multiplu întreg al acestei frecvențe este o armonică superioară.*

Sunetul fundamental și armonicile care-l însoțesc sînt denumite componentele sunetului.

Caracteristica unui sunet care se exprimă prin numărul componentelor care însoțesc sunetul fundamental și nivelul lor de intensitate sonoră se numește timbrul acelui sunet.

10.11.2. **Surse sonore.** Corpurile care pot oscila cu frecvențe între 16 Hz — 20 kHz și care pot genera unde sonore se numesc surse sonore. Printre categoriile de surse sonore importante distingem: *a)* coardele sonore și *b)* tuburile sonore.

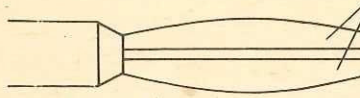


Fig. 10.46. Ancie cu două lame

a) Coarde sonore. Coarda sonoră este sursa sonoră pe
corzi. O coardă sonoră poate fi pusă în oscilație în mod diferit,
versal. Frecvențele componentelor emise de o coardă sonoră
rul relației:

$$\nu_{pr} = n\,\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{T}{\mu}},\ n = 1, 2, 3,$$

unde ν_{pr} reprezintă frecvențele proprii ale coardei sonore,
corzii, tensiunea T din coardă și de μ masa unității de lungi

b) Tuburi sonore. Tuburile sonore constituie o parte
de suflat, avînd rolul de rezonator. Sursa sonoră propriu-z
tiucul), reprezentată în figura 10.46, prin intermediul căreia s
și care formează unde staționare în tubul sonor. Ventrul de
deauna la ancie. În figurile 10.47, *a* și *b* este reprezentat mo
ponentele sunetului în tuburile sonore închise sau deschise.

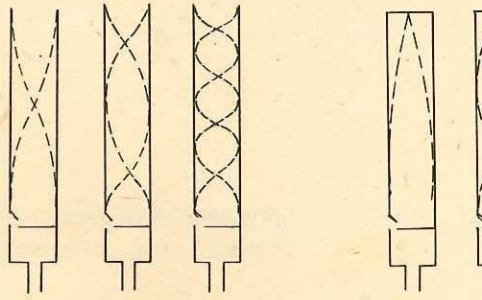
Se observă că pentru tuburile deschise lungimea l
întreg de $\frac{\lambda}{2}$:

$$l = n\frac{\lambda}{2},\ (n = 1, 2, 3, \ldots) \text{ și din } \lambda_n = v$$

rezultă

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{2l}n$$

relație prin care pot fi obținute componentele sunetului emi



a

Fig. 10.47. Unde staționare: *a)* în tuburi
b) în tuburi închise.

Din condiția $l = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$, pentru tuburile închise, se obține pentru componentele sunetului relația:

$$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{v}{4l}(2n - 1). \qquad (10.39)$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Un tub deschis cu lungimea $l = 0{,}5$ m emite oscilații cu lungimea de undă $\lambda = 1$ m. Să se calculeze: *a)* ce armonică produce tubul și ce frecvență are sunetul produs? *b)* Se astupă tubul, (și) se cere lungimea de undă a aceleiași armonici a sunetului emis. Viteza sunetului în aer, $v = 340$ m/s.

Rezolvare. a) În acest caz relația (10.38) ne dă $l = n\frac{\lambda}{2}$ sau $n = \frac{2l}{\lambda} = 1$. Rezultă că este emisă prima armonică (sunetul fundamental) cu frecvența $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{340 \text{ m/s}}{1 \text{ m}} = 340$ Hz.

b) Astupînd tubul, obținem din relația (10.39), $l = (2n - 1)\frac{\lambda_1}{4}$ sau dacă punem $n = 1$, $l = \frac{\lambda_1}{4}$ și $\lambda_1 = 4l = 2$ m. Rezultă $\nu = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{340 \text{ m/s}}{2 \text{ m}} = 170$ Hz. În acest caz, sunetul devine mai grav.

2. O coardă de violoncel are o lungime $l = 1$ m. Masa corzii este de 50 g. La ce tensiune este supusă coarda dacă ea trebuie să vibreze la frecvența fundamentală de 66 Hz?

Rezolvare. În cazul sunetului fundamental trebuie îndeplinită condiția $l = \frac{\lambda}{2}$ deci $\lambda = 2$ m și pentru că

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{\lambda}$$

unde $\mu = \frac{m}{l}$ rezultă pentru valoarea tensiunii din coardă:

$$T = \mu\nu^2\lambda^2 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot 66^2 \text{ Hz}^2 \cdot 4 \text{ m}^2 = 871{,}2\text{N}.$$

ÎNTREBĂRI. EXERCIȚII. PROBLEME

1. Se dă relația $a_{max} = \frac{kA}{m}$, unde a_{max} este accelerația maximă a unui oscilator armonic, k constanta elastică, A amplitudinea și m masa oscilatorului. Arătați că această relație are dimensiunile unei accelerații.

2. Două resorturi elastice de constante k_1, k_2 sînt legate o da
Ce condiție trebuie să îndeplinească k_1, k_2 așa încît perioa
cazuri să fie egale?

R: nu este posibil, deoarece

3. Un punct material oscilează armonic după o lege sinuso
x_1 și x_2 la momente diferite și se găsește $x_1 = 6$ cm, $x_2 =$
zătoare sînt $v_1 = 3$ cm/s, $v_2 = 5$ cm/s. Să se determine:
oscilației armonice; *b)* accelerația maximă.

R: *a)* $A = \sqrt{\frac{v_1^2x_2^2 - v_2^2x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 6{,}87$ cm; $T =$

4. Un bloc cu masa $m = 3{,}62$ kg este suspendat de un res
$k = 520$ N/m. Un glonț cu masa $m' = 4{,}5$ g este tras de
$= 150$ m/s și se oprește în bloc.
Aproximînd mișcarea sistemului bloc-glonț ca o mișcare
afle amplitudinea mișcării.

$$A = \frac{m'g}{k}\sqrt{1$$

5. Un corp de masă m cade de la înălțimea h, pe un platan d
un resort cu constanta elastică k. Știind că după ciocni
să se calculeze amplitudinea mișcării efectuată de sistemul

6. De un dinamometru cu diviziuni între 0 și $F_m = 142$ N și
este suspendat un corp care, datorită unei cauze externe, î
frecvență $\nu = 2$ oscilații pe secundă. Ce masă are corpul

R: $k = F$

7. Un pendul matematic (gravitațional) se fixează de un
Să se găsească perioada pendulului cînd căruciorul se mișc
a; *b)* vertical în sus cu accelerația a; *c)* vertical în j
știu lungimea pendulului l și amplitudinea unghiulară

R: *a)* $2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$; *b)* 2π

8. Pendulul fixat pe căruciorul de la problema 7 este oblig
stantă v pe un cerc de rază R în plan orizontal. Se cere

9. Două pendule gravitaționale oscilează în același loc cu
$\nu_2 = 7$ Hz. Care este raportul lungimilor lor?

10. Cum s-ar putea dovedi experimental că propagarea un
înseamnă și propagarea — transmiterea de energie?

11. Prin intermediul undelor se transmite energie. Dar impuls se transmite prin unde?

12. Undele de torsiune (forfecare) sînt transversale sau longitudinale?

13. Cum pot fi create unde plane? Dar unde sferice?

14. Dacă mediul este omogen şi izotrop, iar sursa de oscilaţie este punctiformă unda care ia naştere este sferică. Ce fel de undă se va produce, dacă mediul este izotrop dar nu este omogen? Dar dacă este omogen dar nu şi izotrop?

15. Undele transversale dintr-o coardă pot fi polarizate. Dar undele sonore sînt polarizate?

16. Dacă două unde interferă, perturbă una din ele propagarea celeilalte?

17. Cînd interferă undele, există o pierdere de energie?

18. Care sînt limitele lungimilor de undă pentru undele sonore în aer? Dar în oţel? Se ştie:

$\nu_{min} = 16$ Hz $\qquad v_{aer} = 340$ m/s

$\nu_{max} = 20$ kHz $\qquad v_{oţel} = 5\,000$ m/s.

R: 21,25 m; $17 \cdot 10^{-3}$ m; 312,5 m; $250 \cdot 10^{-3}$ m.

19. O undă sonoră are frecvenţa de 440 Hz. Care este lungimea de undă a acestui sunet în aer ($v_{aer} = 340$ m/s)? Dar în apă ($v_{apă} = 1\,400$ m/s)?

R: 0,77 m; 3,27 m.

20. Un difuzor are un diametru de 15 cm. La ce frecvenţă, lungimea de undă a sunetului emis de el, în aer, va fi egală cu diametrul său?

R: $22{,}66 \cdot 10^2$ Hz.

21. O mişcare oscilatorie se propagă sub formă de unde într-un mediu elastic străbătînd în 5 s o distanţă de 1 700 m. Cunoscînd lungimea de undă $\lambda = 3{,}4$ m, să se calculeze viteza de propagare a undelor, perioada şi frecvenţa acestora.

R: 340 m/s; 0,01 s; 100 Hz.

22. Să se calculeze lungimea de undă a oscilaţiilor cu frecvenţa de 1,32 kHz ştiind că acestea se propagă cu viteza de 330 m/s.

R: 0,25 m.

23. Să se calculeze viteza maximă a particulelor mediului prin care se propagă o undă cu frecvenţa $\nu = 0{,}5$ kHz şi cu amplitudinea $A = 0{,}25 \cdot 10^{-2}$ m. Se ştie că $\lambda = 0{,}7$ m. Se cere viteza de propagare a undelor în mediul considerat.

R: $v_m = 2\pi\nu A = 7{,}85$ m/s; $\quad v_f = \lambda\nu = 350$ m/s

24. Care este viteza de propagare a undelor transversale într-un fir de cupru cu densitatea relativă $d = 8{,}9$ şi secţiunea $S = 1$ mm² întins de o forţă $F = 100$ N?

R: $v_t = \sqrt{F/dS} = 106$ m/s.

25. Un fragment de metal este analizat măsurînd viteza sune
acest metal, Bara are masa de 30 kg şi volumul de $2 \cdot$
bară este de 4 000 m/s. Să se calculeze modulul de elast

26. O sursă produce oscilaţii cu frecvenţa de 50 Hz care se pr
Cunoscînd vitezele de propagare $v_1 = 5\,000$ m/s şi $v_2 =$
să se calculeze lungimile de undă corespunzătoare.

R

27. Fie $u_1 = 3 \sin 200\,\pi t$ (mm) şi $u_2 = 3 \sin \left(200\,\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
oscilaţiile a două surse S_1 şi S_2 situate la 6 cm una de a
transversale cu elongaţiile paralele şi care se propagă cu
faţa unui lichid. Să se determine diferenţa de fază între m
moment într-un punct situat la distanţa d_1 de S_1 şi la dis

28. Fie oscilaţiile $u_1 = 3 \sin \frac{2\pi}{T} t$ (mm) şi $u_2 = 4 \sin \frac{2\pi}{T} t$ (mm
punzătoare. Să se calculeze amplitudinea undei rezultate
unde într-un punct M, ştiind că diferenţa de drum este d
pagare $v = 0{,}5$ cm/s şi perioada 4 s.

R: $\Delta\varphi = 2\pi\, d/\lambda$, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$

29. Prin suprapunerea a două unde produse de două surse care
tudine $A_1 = 5$ cm, aceeaşi frecvenţă $\nu = 1$ kHz şi care so
într-un punct, rezultă o oscilaţie cu amplitudinea A. Ştiin
mediul respectiv cu viteza $v = 2\,000$ m/s, se cere să se scrie
şi diferenţa de drum în punctul considerat.

R: $A = 2A_1 \cos \frac{\Delta\varphi}{2}$, $u = 8{,}65 \cdot 10^{-2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{10^{-3}} - \frac{x}{2}\right.$

30. Două surse care oscilează conform ecuaţiilor $u_1 = 3 \sin \frac{2\pi}{4} t$
emit unde plane. Să se calculeze *a)* amplitudinea undei
în care diferenţa între drumul parcurs de cele două unde e
de propagare ale celor două unde sînt egale şi au valoarea v
ar trebui să aibă diferenţele de drum parcurse de cele două
siderat, pentru ca amplitudinea să fie maximă? Se conside

31. O sursă O aflată într-un mediu elastic produce oscilaţii de forma $u = 0{,}25 \sin 100\ \pi t$ (mm). Lungimea de undă a undelor plane longitudinale produse este $\lambda = 10$ m. *a)* După cît timp va începe să oscileze un punct M situat la distanţa $x = 8$ m faţă de sursă? *b)* Să se afle defazajul între sursă şi punctul M. *c)* La ce distanţă pe dreapta OM se află două puncte ale căror oscilaţii sînt defazate între ele cu $\frac{\pi}{6}$?

R: $t = \frac{xT}{\lambda} = 16 \cdot 10^{-3}$ s; $\Delta\varphi = \frac{x}{\lambda}\ 360° = 288°$; 0,833 m.

32. Cum putem localiza experimental poziţiile nodurilor şi ventrelor într-o coardă? Dar într-o coloană de aer?

33. O coardă cu lungimea $l = 15$ m fixată la un capăt primeşte la celălalt capăt impulsuri ritmice transversale de mică amplitudine cu frecvenţa $\nu = 2$ Hz. Viteza de propagare a oscilaţiilor în coardă este $v = 20$ m/s. Se neglijează toate amortizările. Se cer: *a)* lungimea de undă; *b)* numărul de fuse ce se formează în coardă.

R: $\lambda = \frac{v}{\nu} = 10$ m; $N = \frac{2l}{\lambda} = 3$.

PROBLEME RECAPITULAT

1. Un punct material se mişcă pe un cerc de rază $R =$ curse şi modulele vectorilor deplasare după: *a)* o şes *c)* o jumătate de cerc; *d)* trei sferturi de cerc; *e)* u

R: *a)* $\frac{\pi R}{3} = 2{,}10$ m; $R = 2{,}00$ m; *c)*

b) $\frac{\pi R}{2} = 3{,}14$ m; $R\sqrt{2} = 2{,}82$ m; *d)*

e) $2\pi R = 12{,}56$ m; zer

2. Un automobil parcurge rectiliniu pe stradă o distanţă $R = 10$ m şi intră într-o stradă perpendiculară pe deseneze traiectoria. Care sînt: distanţa parcursă şi

3. Un biciclist se mişcă rectiliniu uniform pe o bicicletă punct de pe periferia (obada) roţii într-un sistem de *b)* rama bicicletei; *c)* Pămînt?

R: *a)* punct; *b)* cerc; *c)* bucle, asemănăt

4. Cum se schimbă graficul coordonatei x şi al vitezei v sensul pozitiv ales pe axa Ox a mişcării?

R: trec în

5. Să se calculeze vitezele şi acceleraţiile (momentane) sînt: *a)* $x = 3 - 2t$; *b)* $x = 3t^2 + 10$; *c)* $x = 2t^3$.

---

* Aceste probleme nu sînt obligatorii.

6. Ecuația mișcării (rectilinii) unui mobil este: *a)* $x = 2 + 1{,}5t + t^2$; *b)* $x = \frac{1}{2}At^2 + Bt + C$, unde A, B, C sînt constante. Să se scrie legea vitezei și a accelerației.

R: *a)* $v = 1{,}5 + 2t$; $a = 2$;
b) $v = At + B$, $a = A$.

7. O șalupă parcurge distanța dintre două porturi în sensul curgerii rîului în $t_1 = 1{,}00$ h și împotriva curentului în $t_2 = 2{,}00$ h. În cît timp va parcurge această distanță un colac de salvare scăpat în apă?

R: $t = \frac{2t_1t_2}{t_2 - t_1} = 4{,}00$ h.

8. Un călător aflat într-un tren de lungime $l_1 = 900$ m, care se mișcă cu viteza $v_1 = 54$ km/h, vede un timp $t_1 = 60$ s un tren vecin de lungime $l_2 = 600$ m, care se mișcă paralel cu primul tren și în același sens. Care este viteza trenului al doilea? Dacă trenurile se vor mișca acum în sensuri opuse, cît timp va vedea fiecare călător trenul celălalt? Care sistem de coordonate este mai potrivit?

R: SC legat de primul călător (tren),
$v_2 = v_1 \pm l_2/t_1 = 25$ m/s $= 90$ km/h sau 5 m/s $= 18$ km/h;
$t_2 = t_1l_1/l_2 = 90$ s; $t_1' = \frac{l_2}{v_1 + v_2} = 15$ s sau 30 s;
$t_2' = \frac{l_1}{v_1 + v_2} = 22{,}5$ s sau 45 s.

9. Două avioane zboară unul spre celălalt cu aceeași viteză $v = 576$ km/h fiecare. Care a fost (inițial) distanța dintre ele, dacă un semnal sonor (care se propagă rectiliniu uniform cu viteza $c = 340$ m/s), emis de un avion și reflectat de celălalt, se întoarce înapoi după un timp $T = 68$ s?

R: $d = (c + v)^2\ T/2c = 25$ km.

10. Un autoturism se mișcă cu viteza $v_1 = 22$ m/s în spatele unui autocamion care are viteza $v_2 = 15$ m/s. Cînd distanța dintre autoturism și autocamion devine $d_1 = 20$ m, conducătorul autoturismului se angajează în depășirea autocamionului, dar observă în același timp un autobuz venind din sensul opus cu viteza $v_3 = 18$ m/s. Ce distanță minimă d_3 trebuie asigurată între autobuz și autoturism pentru a efectua în siguranță manevra de depășire, astfel ca, după depășire, autoturismul să fie la distanța $d_2 = 50$ m în fața autocamionului?
Care sistem de coordonate este mai potrivit?

R: SC legat de camion; $d_3 = (d_1 + d_2)\frac{v_1 + v_3}{v_1 - v_2} = 400$ m.

11. Un tren se mișcă cu viteza $v = 36$ km/h spre răsărit. Un călător de pe platforma vagonului simte vîntul suflînd dinspre nord. Cînd viteza trenului se dublează, călătorul simte vîntul suflînd dinspre nord-est. Care este viteza și direcția reală a vîntului (față de Pămînt)?

R: $v_0 = v\sqrt{2} = 14{,}1$ m/s dinspre $N - V$.

12. Într-un atelier de reparații dintr-o gară loviturile unui ciocan se succed la un interval de timp $T = 1{,}00$ s. Ce interval de repetiție a loviturilor va înregistra un călător dintr-un tren care se depărtează, respectiv se apropie de gară cu viteza $v = 72$ km/h? Sunetul se propagă rectiliniu uniform cu viteza $c = 340$ m/s.

R: $T' = Tc/(c \mp v) = 1{,}06$ s, respectiv $0{,}95$ s.

13. Un corp pornește uniform accelerat fără viteză inițială, parcurge distanța $d_1 = 6{,}0$ m, după care merge uniform încetinit și parcurge distanța d_2 pînă la oprire. Știind timpul total $T = 10{,}0$ s al mișcării, să se determine d_2 în acele două mișcări.

R: $a_{1,2} = \pm \frac{2}{d_{1,2}T^2}(d_1 + d_2)^2 = 0{,}3$

14. De un tren de masă $M = 100$ t, care merge rectilin
moment dat ultimul vagon de masă $m = 10$ t. Acesta
pînă se oprește. La ce distanță de vagon se va găsi
forța de tracțiune a locomotivei a rămas aceeași? To
porționale cu greutatea.

15. Peste un scripete ideal este trecut un fir cu două cor
Care este raportul maselor m_2/m_1 dacă după un anun
coborît cu $n = 5$-a parte din distanța pe care el ar
în același interval de timp?

R: m

16. Un corp este aruncat vertical în sus cu o viteză iniția
za v_1 a corpului la timpul t_1, atunci cînd corpul se afl
țiune $k = 0{,}19$ din înălțimea maximă la care el poat
aceeași diagramă viteza și coordona corpului în func

R: v_1

t_1

17. Să se împartă înălțimea $h = 100$ m de la care cade li
vale de lungimi $s_i (i = 1, 2, 3, \ldots 10)$, parcurse în acelaș

R: $s_i =$

18. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus, cu aceeași
un interval τ unul după altul. Să se determine τ astf
întîlnească la o înălțime egală cu o fracțiune $k = 0{,}36$ d
ele pot ajunge.

19. De la o înălțime $h = 4{,}9$ m cade liber un corp. Cu ce vite
în jos de la aceeași înălțime un al doilea corp, la un in
pentru ca cele două corpuri să se întîlnească chiar la sup

R: $v_0 =$

20. Două corpuri sînt aruncate vertical în sus cu vitezele inițiale $v_{01} = 60$ m/s și $v_{02} = 40$ m/s, corpul *2* la un interval τ după primul. Care sînt limitele permise ale lui τ pentru ca cele două corpuri să se poată întîlni în aer? (Se va lua $g = 10$ m/s².)

R: $2\,\frac{v_{01} - v_{02}}{g} = 4{,}0\text{ s} < \tau < \frac{2v_{01}}{g} = 12\text{ s}.$

21. Un corp este aruncat vertical în sus cu viteza inițială $v_{01} = 9{,}8$ m/s. După un timp $\tau = 1{,}0$ s se aruncă după el un al doilea corp. Să se afle viteza inițială v_{02} a acestuia astfel ca cele două corpuri să se întîlnească în momentul cînd corpul *2* este la înălțimea sa maximă. Să se reprezinte coordonatele în funcție de timp pe aceeași diagramă.

R: $v_{02} = 7{,}0$ m/s.

22. În drumul unui glonț tras orizontal s-a așezat un paravan de carton la distanța d. Știind diferența de înălțime h dintre pușcă și orificiul făcut de glonț în paravan, să se afle viteza v_0 a glonțului și unghiul α sub care lovește glonțul paravanul (față de direcția orizontală).

R: $v_0 = d\sqrt{g/2h}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{d}$.

23. Un corp a fost aruncat orizontal dintr-un turn și a căzut pe pămînt după $\tau = 0{,}50$ s la distanța $d = 5{,}0$ m (pe orizontală). Să se afle: înălțimea de la care a fost aruncat corpul, viteza inițială v_0, viteza finală v' și unghiul format de ea cu orizontala.

R: $h = \frac{1}{2}g\tau^2 = 1{,}22$ m; $v_0 = d/\tau = 10$ m/s;

$v' = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 11{,}1$ m/s;

$\operatorname{tg}\alpha' = \sqrt{2gh}/v_0$; $\alpha' = 26°21'$.

24. Un corp este aruncat cu viteza $v_0 = 10$ m/s sub un unghi $\alpha_0 = 45°$ față de orizontală. Corpul lovește un perete situat la o distanță $d = 3{,}0$ m. Să se afle: pe ce porțiune, ascendentă sau descendentă a traiectoriei, se produce ciocnirea; la ce înălțime se produce ciocnirea; viteza v' în momentul ciocnirii?

R: ascendentă ($b = 10$ m); $h = d\operatorname{tg}\alpha_0 - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha_0} = 2{,}1$ m;

$v' = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 7{,}6$ m/s.

25. Într-o sanie care lunecă liber, fără frecări, pe un plan înclinat de unghi α față de orizontală, este suspendat de tavan printr-un fir un corp. Cu ce unghi θ față de verticală deviază firul în poziția de echilibru relativ a corpului?

R: $\theta = \alpha$ (firul va fi perpendicular pe planul înclinat).

26. Două corpuri de mase $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 2{,}0$ kg sînt așezate pe un plan orizontal și legate între ele printr-un fir orizontal care rezistă pînă la o tensiune maximă $T_{max} = 100$ N. Coeficientul de frecare la alunecare este același pentru ambele corpuri. Cu ce forță orizontală maximă putem trage corpul m_1 pentru a nu se rupe firul în timpul mișcării?

R: $F_{max} = T_{max}\frac{m_1 + m_2}{m_2} = 250$ N.

27. Știind că pentru a menține în echilibru un corp pe un
trebuie aplicată corpului o forță minimă normală p
decît o forță minimă orizontală, să se calculeze coef
plan.

28. De-a lungul unui plan înclinat de unghi $\alpha = 45°$ est
inițială $v_0 = 10{,}0$ m/s. Coeficientul de frecare la a
înălțimea h la care se ridică corpul, viteza v' cu care
nului, timpul de urcare și timpul de coborîre.

R: $h = v_0^2/2g(1 + \mu\operatorname{ctg}\alpha) = 4{,}25$ m; $v' = v_0\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha -$
$t_u = v_0/g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 1{,}2$ s; $t_c = (v_0/g)$

29. O pană cu unghi de deschidere $\alpha = 30°$ este bătută î
buie să fie coeficientul de frecare minim între pană și
înapoi?

30. Două corpuri de mase $m_1 = 3{,}0$ kg, $m_2 = 2{,}0$ kg sî
de unghi $\alpha = 30°$ și cuplate între ele printr-o tijă fi
Coeficienții de frecare la lunecare sînt respectiv $\mu_1 = 0$
accelerația sistemului și tensiunea din tijă.

R: $a = g\frac{(m_1 + m_2)\sin\alpha - (\mu$
$m_1 +$

$T = m$

31. Se trage un proiectil în direcție verticală, de la supraf
înălțimea maximă h la care urcă proiectilul, dacă viteza
raza Pămîntului $R = 6\,400$ km. Se neglijează frecări

(*Indicație.* Se consideră sistemul proiectil-Pămînt un s
conservării energiei.)

R: $h = v_0^2$

32. De la distanța h de la suprafața Pămîntului se lasă să
viteza lui la suprafața Pămîntului, dacă sînt cunoscute

(*Indicație.* Se aplică legea conservării energiei, pentr

33. Un vagon cu masa $M = 10$ tone, supus acțiunii une
coboară pe un plan înclinat cu unghiul α ($\sin\alpha = 0{,}05$).

și, atinge viteze $v = 12$ m/s, după ce a parcurs distanța $d = 200$ m. Să se calculeze forța de frînare ($g = 10$ m/s²).

R: $F = M\left(g \sin \alpha - \frac{v^2}{2d}\right) = 1\,300$ N.

34. Un automobil cu masa $M = 800$ kg coboară cu viteza inițială $v_0 = 60$ km/h, pe un plan înclinat cu unghiul α față de orizontală ($\sin \alpha = 0{,}04$). Forța de tracțiune a motorului este constantă. Automobilul sosește la baza planului cu viteza $v_1 = 90$ km/h, după ce a parcurs distanța $d = 200$ m. Forța de frecare dintre cauciucurile automobilului și drum este $F_f = 1\,000$ N. Să se calculeze forța de tracțiune F($g = 10$ m/s²).

R: $F = \frac{M(v_1^2 - v_0^2)}{2d} + F_f - \frac{4Mg}{100} = 1\,400$ N.

35. Un ciocan cu masa $m = 1$ kg lovește cu viteza $v = 5$ m/s un cui care pătrunde în lemn cu $x = 1$ cm. Să se calculeze forța de rezistență a lemnului ($g = 10$ m/s²). Se va neglija greutatea ciocanului în raport cu celelalte forțe.

R: $F_r = \frac{mv^2}{2x} = 1\,250$ N.

36. Un pendul gravitațional simplu de masă $m = 100$ g și de lungime $l = 80$ cm se îndepărtează de poziția de echilibru cu un unghi $\alpha = 30°$. *a)* Să se calculeze viteza și tensiunea din fir cînd pendulul trece prin poziția de echilibru.

b) Să se demonstreze că pentru o anumită valoare a unghiului α, tensiunea din fir, la trecerea pendulului prin poziția de echilibru, este egală cu dublul greutății. Să se calculeze în acest caz această valoare α_1 a unghiului α.

R: *a)* $v^2 = 2gl\,(1 - \cos \alpha)$; $v = 1{,}45$ m/s; $T = mg + \frac{mv^2}{l} = 1{,}24$ N;

b) $T_1 = mg\cos \alpha_1 + 2\,mg\,(1 - \cos \alpha_1) = 2\,mg$; $\alpha_1 = 60°$.

37. De ce deviază ramura unui copac atunci cînd de pe ea își ia zborul o pasăre?

R: conservarea impulsului.

38. De un aerostat, aflat în repaus în atmosferă, este legată o scară de sfoară pe care stă un om. Masa aerostatului cu scară este M, iar a omului m. Ce viteză va avea aerostatul, dacă omul începe să urce pe scară cu viteza u *față de scară?* Cîtă energie cinetică dezvoltă omul punîndu-se în mișcare?

R: $v' = -\frac{m}{m + M}u$; $\Delta E_c = \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}u^2$.

39. Doi patinatori de mase $m_1 = 70$ kg și $m_2 = 50$ kg, ținînd de capetele unei sfori, stau pe gheața lucioasă unul în fața celuilalt. Primul din ei începe să tragă de sfoară scurtind-o cu viteza $u = 1{,}20$ m/s. Cu ce viteză se vor mișca patinatorii? (Se neglijează frecările.)

R: $v_1 = \frac{m_2 u}{m_1 + m_2} = 0{,}50$ m/s; $v_2 = -\frac{m_1 u}{m_1 + m_2} = -0{,}70$ m/s.

40. Trei bărci merg una după alta cu viteza v fiecare. [illegible] om, astfel încît masa bărcii și a omului este M, iar în [illegible] saci de masă m fiecare. Din barca din mijloc sînt a[illegible] barca din față, celălalt spre barca din spate, cu aceeași [illegible] înainte de aruncare. Care vor fi vitezele finale ale b[illegible] *a)* simultan; *b)* succesiv?

R: *a)* $v_1 = v + \frac{m}{M + m}$

b) $v_1 = v + \frac{m}{M + m}u$, $v_2 = v + \frac{m^2 u}{M(M +$

sau $v_1 = v + \frac{m(M + 2m)}{(M + m)^2}u$; $v_2 = v - \frac{}{M(}$

41. Două bile de mase $m_1 = 0{,}173$ kg, $m_2 = 0{,}200$ kg se [illegible] cu vitezele $v_1 = 10{,}0$ m/s, respectiv $v_2 = 5{,}0$ m/s. D[illegible] Care va fi viteza primei bile după ciocnire?
Să se traseze diagrama conservării impulsului total.

R: $\vec{v_1'} = \frac{1}{m_1}(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2})$; $v_1' =$

42. Față de care puncte se conservă momentul cinetic al [illegible] și perfect elastic un perete (fig. 5.8)? Care este mom[illegible] mala la perete în punctul de contact?

R: față de punctele normalei la pere[illegible]

43. La pendulul conic (fig. 3.61), față de care punct se [illegible] particulei și ce valoare are? Care este variația pe u[illegible] cinetic față de punctul de suspensie?

R: față de centrul cercului; $L = mvr = ml$ si[illegible]
$|\Delta\vec{L}/\Delta t| = |\vec{M}| = mgr = mgl \sin \alpha$; Δ[illegible]

44. O particulă se mișcă liber, fără frecare, sub acțiunea [illegible] interioară a unei sfere. Să se arate că momentul cine[illegible] trul vertical al sferei se conservă.

45. Două particule de aceeași masă m se mișcă rectiliniu u[illegible] opuse pe două drepte paralele. Să se arate că momentu[illegible] punct din spațiu, nu depinde de alegerea acestui pu[illegible]

46. O bilă de masă $m = 0{,}100$ kg, legată de un centru fix [illegible] $= 0{,}60$ m, execută o mișcare circulară uniformă pe [illegible] frecări cu turația $n_1 = 1{,}00$ rot/s. Ce turație va ave[illegible] pînă la lungimea $l_2 = 0{,}30$ m? Ce lucru mecanic a efe[illegible]

R: $n_2 = n_1 l_1^2/l_2^2 = 4{,}0$ rot/s; $W = \frac{1}{2}$

Fig. R—47. Pentru problema 47.

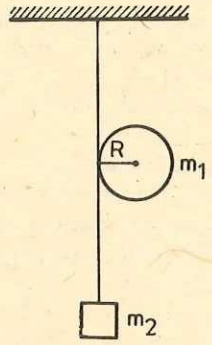
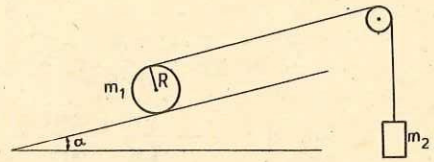


Fig. R—48. Pentru problema 48.



47. Un cilindru de masă m_1 are înfăşurat în jurul său un fir de care este suspendat la capătul liber un corp cu masa m_2 (fig. R—47). Calculaţi tensiunile din fire şi acceleraţia cu care coboară cilindrul cunoscînd raza R şi momentul de inerţie al cilindrului I.

Indicaţie. Cunoscînd m_1, m_2, R şi I se determină a, T_1 şi T_2 din relaţiile: $m_1a = m_1g + T_2 - T_1$; $0 = m_2g - T_2$; $m_1g\,R = (I + m_1R^2)\varepsilon$, $a = \varepsilon R$.

R: $T_1 = g\left(\dfrac{m_1 I}{I + m_1R^2} + m_2\right)$; $T_2 = m_2g$:

$$a = \frac{m_1gR^2}{I + m_1R^2}.$$

48. Pe un plan înclinat de unghi α este aşezat un corp rotund, omogen, de masă m, rază R şi moment de inerţie I. Corpul rotund este legat de un alt corp de masă m_2, prin intermediul unui fir inextensibil trecut peste un scripete cu inerţia neglijabilă (fig. R — 48). *a)* Care este coeficientul de frecare minim necesar pentru ca să nu alunece corpul? *b)* Să se calculeze acceleraţia mişcării corpului şi tensiunea din fir. Aplicaţie numerică: corpul este o sferă; $m_1 = m_2$, $\alpha = 30°$, $\mu = 0{,}20$.

Indicaţie. Din relaţiile: $m_1g \sin\alpha - T - F_f = m_1a_1$; $T - m_2g = m_2a_2$; $a_2 - a_1 = \varepsilon R$; $(F_f - T)\,R = \varepsilon I$, se scot F_f, a_1 şi T. Din condiţia $F_f < \mu gm \cos\alpha$ rezultă $\mu_{min} < \mu$.

R: *a)* $\mu_{min} = 0{,}154 < \mu$, deci nu avem alunecare; *b)* $a = 0{,}205\ g$; $T = 0{,}47\ m_1g$.

49. Un fir trecut peste un scripete de inerţie neglijabilă are la un capăt un cilindru plin de masă m_1 şi rază R iar la celălalt un corp de masă m_2 (fig. R—49). Să se afle acceleraţia mişcării corpului m_2, în cazul cînd cilindrul nu alunecă pe suprafaţa orizontală.

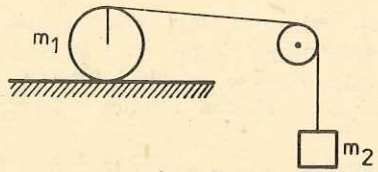


Fig. R—49. Pentru problema 49.

(*Indicaţie.* Dacă cilindrul se rostogoleşte pe plan at

$T + F_f = (1/2)m_1a$; $m_2g - T = m_2a$; $(T -$

şi de aici rezultă a.)

50. Un om cu masa m_1 se deplasează pe circumferinţa aflat iniţial în repaus. Discul are masa m_2 şi raza unui ax vertical care trece prin centrul său. Cu ce discul, cînd omul se deplasează cu viteza v faţă de dis

(*Indicaţie.* Se scrie conservarea momentului cinetic $= I\omega + I_1\omega$ unde $L = m_1rv$; $I\omega =$ momentul cin tul cinetic pentru om. De aici rezultă valoarea lui

51. Cinci forţe acţionează asupra unui punct material. P ţelor se află într-unul din vîrfurile unui hexagon regu lalte vîrfuri. Să se afle rezultanta forţelor, luînd măr egală cu 1 N.

52. Două resorturi R_1 şi R_2 de mase neglijabile şi de lun cu $\Delta l_1 = 1$ cm, sub acţiunea unei forţe deformatoare pentru o forţă $F_2 = 1$ N. Se suspendă resorturile în acelaşi plan orizontal. Se fixează o tijă rigidă, de tăţile libere A_1 şi A_2, ale resorturilor. Apoi se atîrn D al tijei.

a) Să se determine poziţia punctului D, caracterizată ca tija A_1A_2 să rămînă orizontală.

b) Să se determine alungirea suplimentară Δl a resort $\Delta G = 1$ N.

53. Un cilindru gradat are grosimea $e = 2$ mm, înălţimea $D_1 = 4$ cm. Baza cilindrului are diametrul $D_2 = 6$

a) Să se determine poziţia centrului de greutate al punctul aflat la jumătatea înălţimii cilindrului.

b) Se umple cilindrul cu apă pînă la jumătate, să se determine și în acest caz poziția centrului de greutate al cilindrului în raport cu același punct.

R: *a)* $x = \frac{G_2}{G_1 + G_2} \frac{h + e}{2} = 0{,}98$ cm;

b) $y = \frac{1}{G_1 + G_2 + G_3}\left[(G_1 + G_2)\, x + G_3 \frac{h}{4}\right] = 2{,}84$ cm.

54. Un tub cilindric care conține o anumită cantitate de mercur, plutește în apă scufundîndu-se cu $h = 10$ cm din lungimea sa. Într-un lichid de densitate necunoscută, tubul plutește scufundîndu-se cu $h' = 12{,}5$ cm din lungimea sa. Să se determine densitatea relativă a lichidului, față de apă.

R: $d = \frac{h}{h'} = 0{,}8.$

55. Pe un cărucior se află un vas cilindric în care se găsește apă pînă la înălțimea h, față de baza cilindrului. În peretele cilindrului, pe părți diametral opuse, sînt făcute două orificii identice, cu secțiunea $S = 10^{-3}$ m². Un orificiu se află la înălțimea $h_1 = 0{,}25$ m, iar celălalt la înălțimea $h_2 = 0{,}5$ m, față de baza cilindrului.
Să se determine sensul și intensitatea forței ce trebuie aplicată căruciorului, pentru ca acesta să rămînă în repaus, cînd se deschid orificiile și prin acestea începe să curgă apă.

R: $F = 2\rho S g(h_2 - h_1) = 4{,}9$ N.

56. Un ceas cu pendul care bate secunda ($T_0 = 2$ s) la suprafața Pămîntului este mutat la o altitudine $h = 200$ m în aceeași localitate. Ce influență va avea această mutare asupra mersului ceasului? Cu cîte secunde se va modifica mersul lui în $D = 24$ ore? Raza Pămîntului $R = 6\,400$ km.

R: $T = 2\pi\left(1 + \frac{h}{R}\right)\sqrt{\frac{l}{g_0}} = \left(1 + \frac{h}{R}\right) T_0;$

$\Delta t = D\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) = -2{,}70$ s, întîrziere.

57. Densitatea unui corp de mici dimensiuni este $\rho = 2{,}6 \cdot 10^3$ kg/m³. Acest corp este suspendat de un fir și determinat să oscileze într-un mediu cu densitatea $\rho_0 = 1{,}3$ kg/m³. Aflați ce relație există între perioada de oscilație T a pendulului care oscilează în acest mediu și perioada lui de oscilație în vid T_0. Se neglijează forțele de frecare.

R: $T = T_0 \sqrt{\frac{\rho}{\rho - \rho_0}}.$

58. Știind că energia totală a unui oscilator armonic este

țială $E_p = \frac{1}{2} k y^2$, să se reprezinte într-un sistem de

cinetice și potențiale a oscilatorului armonic.

59. O oscilație armonică $y = A \sin \omega t$ se propagă ca o pertu
$v = 7{,}5 \cdot 10^{-3}$ m/s de la origine de-a lungul axei x, A
Să se determine: *a)* perioada T, frecvența ν și lungimea
c) imaginea momentană (un desen la scară) a perturbației
$= 9$ s.

60. Legea de propagare a undei plane într-un mediu elast
$= A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. *a)* Cum se reflectă planeita
b) Ce condiție trebuie pusă intervalului de timp t, per
legii să aibă sens fizic?

R: dacă unda pleacă din $x = 0$ la $t = 0$ a

61. Două surse de oscilație S_1 și S_2 emit unde de amplitudin
$= 5$ mm. Frecvența undelor emise este $\nu = 160$ Hz,
mediul considerat este $v = 320$ m/s. Să se afle amplitu
situat la distanța $x_1 = 6{,}5$ m de prima sursă și $x_2 =$
că cele două surse oscilează în fază.

62. O săniuță de masă m lunecă liber pe un plan înclinat de
undeva pe planul orizontal. Ce lucru mecanic trebuie e
înapoi la locul de plecare?

63. De ce vina de apă dintr-un robinet (în curgere lentă și l
treptat pe măsură ce coboară?

R: Sv

64. Putem măsura masele cu un dinamometru, dacă avem la
de masă?

R:

65. Un corp este tîrît uniform pe un plan orizontal cu u
unei forțe care face unghiul α cu orizontala. Pentru ce
tracțiune va fi minimă?

66. Doi pescari trebuie să treacă peste un rîu exact în punctul opus. Amîndoi vîslesc cu aceeaşi viteză $v_b = 2{,}0$ m/s faţă de apă, iar viteza apei este peste tot $v_a = 1{,}2$ m/s. Primul orientează barca astfel încît înaintează rectiliniu şi ajunge exact în punctul opus într-un timp t_1. Celălalt orientează barca perpendicular pe ţărm, ajunge lîngă celălalt mal, apoi vîsleşte de-a lungul acestui mal pînă ajunge în acelaşi punct final în timpul t_2. Care este raportul t_1/t_2 ?

R: $t_1/t_2 = \sqrt{\dfrac{v_b - v_a}{v_b + v_a}} = 1/2.$

67. Un pescar mergînd cu barca în susul rîului scapă, în dreptul unui pod, un colac în apă. După un timp $\tau = 1/2$ h îşi dă seama de aceasta şi se întoarce înapoi, găsind colacul la distanţa $d = 5{,}0$ km mai departe de pod. Care este viteza apei, dacă pescarul vîsleşte mereu cu aceeaşi intensitate? Care sistem de referinţă este mai potrivit?

R: SC legat de apă; $v = d/2\tau = 5{,}0$ km/h.

68. Experienţa arată că particulele mici care cad liber în aer întîmpină din partea aerului o forţă de rezistenţă (de frecare) proporţională cu viteza particulei şi orientată în sensul opus vitezei: $\vec{F_r} = -k\vec{v}$, unde k este o constantă de proporţionalitate. Viteza acestor particule atinge destul de repede o valoare maximă (limită) *constantă*. Să se calculeze această viteză limită de cădere liberă, dacă masa particulelor este m=10 mg şi constanta de proporţionalitate $k = 2{,}0 \cdot 10^{-3}$ N · s/m.

R: $c = mg/k = 4{,}9$ cm/s.

69. O bilă de masă $m = 100$ g este suspendată printr-un fir de tavanul unui vagon. Cînd vagonul merge uniform frînat, firul cu bila se află în echilibru relativ, deviat cu unghiul $\theta = 60°$, faţă de verticală. Să se afle acceleraţia vagonului şi tensiunea din fir.

R: $a = -g\operatorname{tg}\theta = -17$ m/s²; $T = mg/\cos\theta = 1{,}96$ N.

70. Un tren începe să frîneze uniform, parcurgînd astfel o distanţă $s = 180$ m pînă la oprire. Un pendul simplu suspendat în vagon este deviat (la echilibru relativ) cu unghiul $\theta = 5°$ în timpul frînării. Care a fost viteza iniţială a trenului?

R: $v_0 = \sqrt{2gs \cdot \operatorname{tg}\theta} = 17{,}6$ m/s.

71. Un corp este aruncat (în vid) cu viteza iniţială $v_0 = 20$ m/s sub un unghi $\alpha_0 = 45°$ faţă de orizontală. După cît timp şi la ce înălţime vectorul viteză formează un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala?

R: $t = \dfrac{v_0}{g}\cos\alpha_0(\operatorname{tg}\alpha_0 - \operatorname{tg}\alpha) = 0{,}63$ s;

$$y = \frac{1}{2g}v_0^2\cos^2\alpha_0(\operatorname{tg}^2\alpha_0 - \operatorname{tg}^2\alpha) = 6{,}8 \text{ m}.$$

72. Două corpuri sînt aruncate simultan din acelaşi punct cu aceeaşi viteză iniţială $v_0 = 10$ m/s sub unghiurile $\alpha_1 = 30°$, respectiv $\alpha_2 = 60°$. Care este distanţa d dintre corpuri după $t = 2{,}0$ s?

R: $d = 2v_0t\sin(\alpha_2 - \alpha_1)/2 = 11{,}3$ m.

73. O ţintă de pe un deal se vede sub unghiul β faţă de orizontală. Distanţa pe orizontală pînă la ţintă este d. Ştiind viteza iniţială v_0 a obuzului, să se afle unghiul α_0 de tragere. Care este viteza minimă necesară pentru a atinge ţinta?

R: $\operatorname{tg}\alpha_0 = \dfrac{v_0^2}{gd} \pm \sqrt{\dfrac{v_0^4}{g^2d^2} - \dfrac{2v_0^2}{gd}\operatorname{tg}\beta - 1}$; $v_0 \geqslant \sqrt{\dfrac{gd}{\quad}(\sin\beta + 1)}$.

74. Un corp este aşezat pe un plan înclinat de unghi $\alpha = 60°$, fără f
va luneca liber corpul de-a lungul planului înclinat, dacă acest
leraţie orizontală $a' = 5{,}0$ m/s²?

R: $a = g\sin\alpha \mp a'\cos\alpha =$

75. Într-un lift care se mişcă cu o acceleraţie $a' = 2{,}2$ m/s² îndrep
pe podea un plan înclinat neted fără frecări, care formează un
deaua. Cu ce acceleraţie va coborî liber de-a lungul planului, un c
aşezat pe acest plan înclinat? Care va fi apăsarea pe plan?

R: $mg\sin\alpha = m(a - a'\sin\alpha)$; $N - mgco$
$a = (g + a')\sin\alpha = 6{,}0$ m/s²; $N = m$

76. De o parte şi de alta a unui dublu plan înclinat (unghi diedru
şi $\alpha_2 = 60°$ faţă de orizontală, sînt aşezate două corpuri de
legate printr-un fir trecut peste un scripete ideal din vîrful
frecările. Diferenţa de nivel dintre corpuri este iniţial $h = 1{,}0$
cele două corpuri ajung la acelaşi nivel. Care este raportul m

R: $m_2/m_1 = \dfrac{g\tau^2(\sin\alpha_1 +}{g\tau^2(\sin\alpha_1 +}$

77. De ce la elicoptere, pe lîngă elicea mare cu axa verticală, mai
la coadă, cu axa orizontală?

R: pornind elicea mare, corpul elicopterului s-ar roti
varea momentului cinetic), ceea ce este împiedicat

78. Într-o barcă aflată pe un lac stau la capete doi elevi. Masa lor şi
elev aruncă celui de-al doilea o minge de masă m cu viteza
viteză relativă va lovi mingea pe al doilea elev?

79. Un corp de masă m_1 loveşte cu viteza v_1 un alt corp de masă m_2
ciocnire direcţiile de mişcare ale corpurilor formează unghiurile θ
ţia iniţială de mişcare ($\vec{v_1}$) a primului corp. Să se afle vitezele fin

R: $v_1' = \dfrac{v_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$; v_2

80. Pe o masă este întins un lanţ. Un capăt al lanţului, de care este
dimensiuni neglijabile, atîrnă liber peste marginea mesei. Cînd
pe masă are lungimea l_0, lanţul începe să lunece. Să se calculeze
mentul cînd el părăseşte masa.

Indicaţie: dacă m este masa lanţului şi M masa corpului greu
$+ m\dfrac{l - l_0}{l}g = \mu m\dfrac{l_0}{l}g$. Scăderea energiei potenţiale $\left(M\right.$
$+ m\dfrac{l_0}{l}g \cdot \dfrac{l_0}{2}$ este egală cu energia cinetică $(M+m)v^2/2$ plus lu
de frecare $\mu m\dfrac{l_0}{l}g \cdot \dfrac{l_0}{2}$.

Nr. colilor de tipar : 20
Bun de tipar : 29.02.1988

Com. nr. 70371/34 030
Combinatul Poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.